

**Vedecká rada Fakulty elektrotechniky a informatiky
Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave**

Ing. Ivan Holič

**ROBUSTNÉ RIADENIE
DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV**

Autoreferát dizertačnej práce

na získanie vedecko-akademickej hodnosti
philosophiae doctor, PhD.

v odbore doktorandského štúdia
9.2.7 Kybernetika

Bratislava 2013

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Ústave riadenia a priemyselnej informatiky, Fakulty elektrotechniky a informatiky, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave.

Predkladateľ: **Ing. Ivan Holič**
Ústav riadenia a priemyselnej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky, STU v Bratislave
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Školiteľ: **doc. Ing. Danica Rosinová, PhD.**
Ústav riadenia a priemyselnej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky, STU v Bratislave
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Oponenti: **prof. Ing. Boris Rohal'-Ilkiv, CSc.**
Ústav automatizácie, merania a aplikovanej informatiky
Strojnícka fakulta, STU v Bratislave
Nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava

prof. Ing. Dušan Krokavec, CSc.
Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky, TU v Košiciach
Letná 9/B, 042 00 Košice

Autoreferát bol rozoslaný dňa

Obhajoba dizertačnej práce sa koná
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v obore doktorandského štúdia, vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa , číslo odboru: 9.2.7, odbor doktorandského štúdia: Kybernetika na Ústave riadenia a priemyselnej informatiky, Fakulty elektrotechniky a informatiky, Slovenskej technickej univerzity, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Predseda spoločnej odborovej komisie:.....
Ústav riadenia a priemyselnej informatiky, STU v Bratislave
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

OBSAH

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK.....	4
1 ÚVOD.....	5
2 PREHEAD PROBLEMATIKY ROBUSTNÉHO RIADENIA.....	6
2.1 \mathcal{D}_R oblasť stability.....	6
2.2 Robustná a kvadratická stabilita.....	7
3 FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE DIZERTAČNEJ PRÁCE.....	10
4 NÁVRH REGULÁTOROV VYUŽITÍM LMI OBLASTÍ STABILITY	11
4.1 LMI oblasti stability.....	11
4.1.1 LMI regióny v diskretnéj časovej oblasti.....	11
4.1.2 Eliptický LMI región.....	15
4.2 Návrh stavovej spätnej väzby v diskretnéj oblasti.....	16
4.3 Návrh stavovej spätnej väzby a rekonštruktora stavov pre spojitý systém	17
4.3.1 Návrh rekonštruktora stavov systému.....	18
4.4 Návrh PI regulátora pomocou spätnej väzby z výstupu.....	18
5 ÚLOHY S OHRANIČENÍM AKČNÉHO ZÁSAHU.....	19
5.1 Ohraničenie vstupu invariantnou množinou.....	20
5.2 Návrh stavovej spätnej väzby.....	20
5.3 Návrh PI regulátora pomocou spätnej väzby z výstupu.....	21
6 ROBUSTNÉ DECENTRALIZOVANÉ RIADENIE	21
6.1 Formulácia decentralizovaného riadenia.....	21
6.2 Postup návrhu regulátorov	25
7 RIADENIE SYSTÉMOV S DOPRAVNÝM ONESKORENÍM.....	27
7.1 Systém s dopravným oneskorením a PI algoritmom riadenia.....	27
7.2 Diskretizovaný Ljapunovov-Krasovského funkcionál	29
8 ZÁVER	32
LITERATÚRA.....	33
VLASTNÉ PUBLIKOVANÉ PRÁCE	34

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

Symboly a označenia

$A(\alpha), B(\alpha)$	polytopicky opísané matice systému
A, B, C	matice systému so známymi parametrami
\mathbb{C}	množina komplexných čísel
$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$	$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasť stability
$f_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}$	charakteristická funkcia LMI oblasti
F	spätnoväzobná matica zosilnenia
F_x	matica rekonštruktora stavových veličín
I	jednotková matica
K_I	integračná zložka regulátora
K_P	proporcionálna zložka regulátora
$M = M^T > 0$	matica M je symetrická kladne definitná
$M = M^T \geq 0$	matica M je symetrická kladne semidefinitná
M^T	transponovaná matica k matici M
$M_{n \times n}, M^{n \times n}$	matica rozmerov
M^{-1}	inverzná matica k matici M
P	Ljapunovova matica
\mathbb{R}	množina reálnych čísel
$\ \cdot\ $	euklidovská norma vektora
\otimes	Kroneckerovo násobenie
*	prvky matice symetrické podľa hlavnej diagonály

Skratky

BMI	bilinéarne maticové nerovnosti,
LMI	lineárne maticové nerovnosti,
MIMO	mnohorozmerný systém
ORO	otvorený regulačný obvod,
PI	proporčno-integračný regulátor,
SISO	systém s jedným vstupom a jedným výstupom
URO	uzavretý regulačný obvod.

1 Úvod

Na základe požiadaviek z praxe možno povedať že aplikácia lineárnej teórie automatického riadenia v praxi často nedáva dostatočne dobré výsledky, a preto je potrebné rozpracovanie teórie robustného riadenia, ktorá umožní návrh regulačných obvodov aj pre reálne objekty (procesy) so zohľadnením neurčitostí. Teória robustného riadenia v sebe zahŕňa metódy analýzy vlastností reálnych objektov a syntézy regulačných obvodov pre reálne dynamické systémy. Pri analýze stability resp. riadení reálneho procesu sa vychádza z fyzikálneho opisu systému resp. z identifikovaných parametrov. Možno povedať, že takto získaný matematický model systému je nepresný, pretože každý model fyzikálneho procesu opisuje skutočnú dynamiku iba približne. Nepresnosť modelu môže byť spôsobená rôznymi faktormi ako sú napr. nelinearity, nepresnosť snímačov, neznáme resp. čiastočne známe parametre a pod. Preto sa pri robustnom riadení uvažuje model dynamického systému vrátane neurčitostí.

Predložená práca pozostáva z ôsmich kapitol vrátane úvodu a záveru.

Druhá kapitola obsahuje vybraný prehľad problematiky robustného riadenia v časovej oblasti, ktorá pozostáva z:

- presne uvedených modelov neurčitostí pre SISO a MIMO systémy vo frekvenčnej a časovej oblasti,
- definície lineárnych maticových nerovností (Linear Matrix Inequalities- LMIs),
- problematiky analýzy stability a syntézy robustných regulátorov,
- definície \mathcal{D} resp. \mathcal{D}_κ oblastí stability a ich presného vyjadrenia pomocou LMI algoritmov,
- vybraných prístupov riadenia systémov s dopravným oneskorením.

V tretej kapitole sú uvedené ciele dizertačnej práce. Kapitoly 4 až 7 sú venované vlastným (pôvodným) výsledkom práce, z ktorých väčšina bola publikovaná.

Štvrtá kapitola pozostáva z návrhu robustných regulátorov so spätnou väzbou z výstupu a od vektora stavových veličín pre neurčité systémy v spojitej a diskretnej časovej oblasti s využitím teoretických poznatkov z druhej kapitoly. V prípade diskretnej časovej oblasti je uvedená aproximácia nekonvexnej oblasti tmenia elipsou a jej LMI formulácia. Návrh regulátorov je vykonaný pre reálne systémy, ktorých vektor stavových veličín nie je merateľný, a preto je navrhnutý aj rekonštruktor stavov.

Piata kapitola sa zaoberá návrhom robustných regulátorov pre neurčité systém s požiadavkou ohraničenia akčného zásahu pomocou elipsoidálnych invariantných množín, ktorá sa využíva najmä v oblasti prediktívneho riadenia.

Šiesta kapitola sa zaoberá teóriou decentralizovaného riadenia zložitých systémov. V poslednej dobe je s pojmom decentralizovaného riadenia spájaná myšlienka ekvivalentných podsystémov, ktorá bola pre frekvenčnú oblasť uvedená v práci [13]. V šiestej kapitole je uvedená metóda návrhu robustných regulátorov pre ekvivalentné podsystémy v časovej oblasti.

V poslednej siedmej kapitole je uvedený postup návrhu robustných regulátorov pre systémy s dopravným oneskorením s využitím diskretizovanej formy Ljapunovov-Krasovského funkcionálu, vďaka ktorému možno celý interval časového oneskorenia rozdeliť na niekoľko častí rovnakej dĺžky.

Súčasťou práce je aj zoznam použitých symbolov a skratiek, zoznam použitej literatúry a zoznam publikovaných prác.

2 PREHLAD PROBLEMATIKY ROBUSTNÉHO RIADENIA

2.1 $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasť stability

$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasť stability predstavuje podmnožinu komplexnej roviny \mathbb{C} [18].

Definícia 2.1

$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasť komplexnej roviny \mathbb{C} je definovaná nasledovne

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \left\{ s \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}s + R_{12}^T s^* + R_{22}ss^* < 0 \right\} \quad (2.1)$$

kde $R_{11} = R_{11}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $R_{22} = R_{22}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a predpoklad $R_{22} \geq 0$ (platí pre konvexnú oblasť, ktorú možno definovať pomocou LMI). Bez predpokladu na maticu R_{22} , môže byť $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasť nekonvexnou. Za predpokladu, že $R_{22} \geq 0$, možno maticu R_{22} prepísať podľa [18] takto

$$R_{22} = LL^T \quad (2.2)$$

kde $L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ je druhá odmocnina z R_{22} . $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasť (2.1) možno potom prepísať do nasledovného tvaru

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} R_{11} + R_{12}s + R_{12}^T s^* & Ls \\ L^T s^* & -I_d \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (2.3)$$

Základná charakteristika $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasti:

- $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasti sú symetrické vzhľadom na reálnu os komplexnej roviny [18]
- prienikom viacerých LMI regiónov je opäť LMI región

Štandardné voľby $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ oblasti:

- 1) Ľavá polrovina komplexnej roviny \mathbb{C} (oblasť stability pre spojité systémy: $\text{Re}(s) < 0$) je opísaná maticami

$$R_{11} = 0, R_{12} = R_{12}^T = 1, R_{22} = 0 \quad (2.4)$$

a jej grafická interpretácia je na obr. 2.1 (ilustrácia č.1).

- 2) Jednotková kružnica v komplexnej rovine \mathbb{C} so stredom v bode $(0,0)$ je opísaná nasledovne

$$R_{11} = -1, R_{12} = R_{12}^T = 0, R_{22} = 1 \quad (2.5)$$

a jej grafická interpretácia je na obr. 2.1 (ilustrácia č.2).

Príklady špeciálnych LMI oblastí v spojitých časovej oblasti ([19]):

- 3) Posunutá polrovina komplexnej roviny \mathbb{C} smerom doľava ($\text{Re}(s) < -\delta$) je opísaná maticami

$$R_{11} = 2\delta, R_{12} = R_{12}^T = 1, R_{22} = 0 \quad (2.6)$$

Takto definovaná LMI oblasť je zobrazená na obr. 2.1 (ilustrácia č.3) a možno ju nazvať ako oblasť δ - stability (dolný limit pre stupeň stability).

- 4) Kruh s polomerom r a stredom v bode $(q,0)$ je sektor opísaný maticami

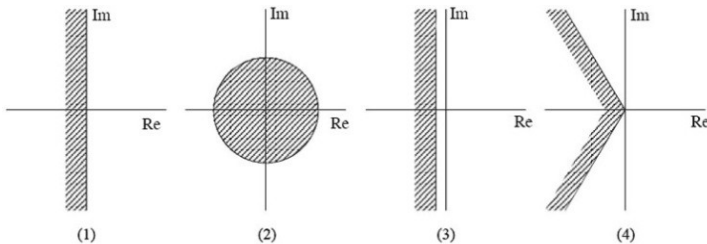
$$R_{11} = \begin{bmatrix} -r & -q \\ -q & -r \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{22} = 0^{2 \times 2} \quad (2.7)$$

Kruh so zadaným polomerom a stredom predstavuje horný limit dynamiky systému, čiže dochádza k obmedzeniu rýchlych pólov systému.

- 5) Kónický sektor v ľavej polovine komplexnej roviny \mathbb{C} s vrcholom v bode $(0,0)$ a vnútorným uhlom 2φ ($\text{Re}(s) \tan \varphi < -|\text{Im}(s)|$) je definovaný maticami

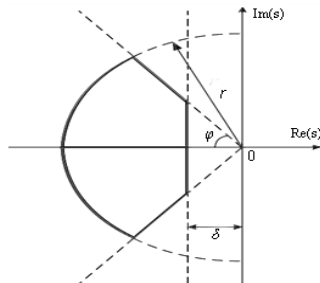
$$R_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}, R_{22} = 0^{2 \times 2} \quad (2.8)$$

Takto definovaná LMI oblasť je zobrazená na obr. 2.1 (ilustrácia č.4) a predstavuje tlmiaci faktor systému (možnosť znížiť prerogulovanie URO).



Obr. 2.1 Oblasti stability v komplexnej rovine [5]

LMI oblasti (posunutá polovina komplexnej roviny, kruh a kónický sektor) sú podrobnejšie zobrazené na obr. 2.2, kde vidno aj ich prienik. Možno teda povedať, že prienikom LMI oblastí vznikajú opäť LMI oblasti, ktorých matice sú väčších rozmerov.



Obr. 2.2 Prienik LMI- oblastí

2.2 Robustná a kvadratická stabilita

Uvažujme teraz lineárny časovo invariantný dynamický systém

$$\begin{aligned}\delta x(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.9}$$

kde $\delta x(t) = \begin{cases} \dot{x}(t), & \text{pre spojitý systém} \\ x(t+1), & \text{pre diskretný systém} \end{cases}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor stavových veličín, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor vstupných (riadiacich) veličín a $y(t) \in \mathbb{R}^l$ je vektor výstupu. $A(\alpha)$ a $B(\alpha)$ predstavujú matice neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je nasledovný

$$\mathcal{A} := \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}\tag{2.10}$$

$$\mathcal{B} := \left\{ B(\alpha) : B(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}\tag{2.11}$$

Keďže ide o časovo invariantný systém, parameter α je nezávislý od času. Konkrétny opis takéhoto systému je potom vždy niektorý prvok z množiny modelov (2.10) a (2.11). V prípade robustnej stability bude stačiť zabezpečenie stability vo všetkých bodoch oblasti neurčitosti.

V prípade, že existuje jedna symetrická kladne definitná matica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pre celú oblasť neurčitostí, možno povedať, že ide o kvadratickú stabilitu.

Veta 2.1

Matica $A(\alpha)$ z množiny \mathcal{A} je kvadraticky $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stabilná vtedy a len vtedy, ak existuje symetrická kladne definitná matica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pre ktorú platí nasledovná maticová nerovnosť

$$M_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}(A_i, P) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0\tag{2.12}$$

kde $M_{11} = R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA_i) + R_{12}^T \otimes (A_i^T P)$, $M_{12} = (I_d \otimes A_i^T)(L \otimes P)$, $M_{22} = -I_d \otimes P$ a $R_{22} = LL^T$ ($L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ je druhá odmocnina z R_{22}) podľa [18, 22].

Veta 2.2 (podmienky $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stability podľa [18])

Matica $A(\alpha)$ z množiny \mathcal{A} je kvadraticky $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stabilná vtedy a len vtedy, ak existuje symetrická kladne definitná matica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a dve matice $H \in \mathbb{R}^{d \times d \times d}$ a $G \in \mathbb{R}^{d \times d \times d}$, pre ktoré platí nasledujúca maticová nerovnosť

$$M_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}(A_i, P) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0\tag{2.13}$$

$$M_{11} = R_{11} \otimes P + H(I_d \otimes A_i) + (I_d \otimes A_i^T)H^T, M_{12} = R_{12} \otimes P + (I_d \otimes A_i^T)G - H, M_{22} = R_{22} \otimes P - G - G^T.$$

V prípade ľavej polroviny komplexnej roviny \mathbb{C} (oblasť stabilných pólov pre spojitý systém) možno vzťah (2.13) prepísať do tvaru (2.14) a pre jednotkový kruh v diskretnéj z -oblasti nadobudne vzťah (2.13) tvar (2.15).

Spojité časová oblasť:

$$M_{\mathcal{D}_k}(A_i, P) = \begin{bmatrix} HA_i + A_i^T H^T & P + A_i^T G - H \\ P + G^T A_i - H^T & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

Diskrétna časová oblasť:

$$M_{\mathcal{D}_k}(A_i, P) = \begin{bmatrix} -P + HA_i + A_i^T H^T & A_i^T G - H \\ G^T A_i - H^T & P - G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

Podobné výsledky pre stabilitu polytopického systému sú uvedené aj v prácach [7, 9]. V práci [6] je na syntézu regulátora v diskkrétnej časovej oblasti uvažovaná matica $H = 0$.

V nerovnostiach (2.14) a (2.15) vystupuje jednoduchá Ljapunovova matica P (tá istá pre celú oblasť neurčitosti), čo zaručuje stabilitu aj pri časovo variantnom systéme. Tento prístup však dáva vo všeobecnosti konzervatívne výsledky, ktoré sú ale výpočtovo veľmi ľahko dosiahnuteľné pomocou štandardných LMI nástrojov [6]. Možno teda povedať, že kvadratická stabilita zaručená jednou Ljapunovovou funkciou pre celú oblasť neurčitosti sa stáva len postačujúcou podmienkou robustnej stability, pričom oblasť skutočnej stability systému môže byť výrazne väčšia [20]. Menej konzervatívne výsledky v oblasti syntézy a návrhu robustných regulátorov (t. j. bližšie k reálnej hranici stability) možno dosiahnuť použitím Ljapunovovej funkcie s premenlivými parametrami $P(\alpha)$, ktorej opis je nasledovný

$$\mathcal{P} := \left\{ P(\alpha) : P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (2.16)$$

Veta 2.3 (*Veta 2.2 pre polytopický systém s parametricky závislou Ljapunovovou maticou*)

Polytopický systém (2.9) je robustne \mathcal{D}_k stabilný, ak existujú také matice $H \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $G \in \mathbb{R}^{dm \times dn}$ a N symetrických kladne definitných matíc P_i , pre ktoré platí nasledujúci vzťah

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad M_{\mathcal{D}_k}(A_i, P_i) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

$$M_{11} = R_{11} \otimes P_i + H(I_d \otimes A_i) + (I_d \otimes A_i^T)H^T, M_{12} = R_{12} \otimes P_i + (I_d \otimes A_i^T)G - H, M_{22} = R_{22} \otimes P_i - G - G^T.$$

V prípade ľavej polroviny komplexnej roviny (oblasť stabilných pólov pre spojité systémy) možno vzťah (2.17) prepísať do tvaru (2.18) a pre jednotkový kruh v diskkrétnej z -oblasti nadobudne vzťah (2.17) tvar (2.19).

Spojité časové oblasti:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad M_{\mathcal{D}_k}(A_i, P_i) = \begin{bmatrix} HA_i + A_i^T H^T & P_i + A_i^T G - H \\ P_i + G^T A_i - H^T & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

Diskrétna časová oblasť:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad M_{\mathcal{D}_k}(A_i, P_i) = \begin{bmatrix} -P_i + HA_i + A_i^T H^T & A_i^T G - H \\ G^T A_i - H^T & P_i - G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

3 FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE DIZERTAČNEJ PRÁCE

Teoretická časť dizertačnej práce dokumentuje vybrané oblasti robustného riadenia dynamických systémov. Podrobne rozoberá:

- analýzu stability dynamických systémov s veľkým dôrazom na LMI oblasti stability, ktoré sú základom robustného umiestnenia pólov URO,
- syntézu regulačných obvodov,
- riadenie systémov s dopravným oneskorením.

Úlohou dizertačnej práce je priniesť nové výsledky v oblasti robustného riadenia dynamických systémov v časovej oblasti s využitím maticových nerovností, konkrétne ide o:

- ďalšie výsledky pre robustné umiestnenie pólov pri návrhu riadenia v časovej oblasti, najmä pre časovo-diskrétné systémy, kde je čiastkovým cieľom nájsť vhodnú konvexnú aproximáciu nekonvexnej oblasti pre stanovené tlmenie,
- úlohy s ohraničením akčného zásahu, cieľom je využiť formuláciu ohraničenia akčného zásahu pomocou lineárnych maticových nerovnic,
- využitie výsledkov z návrhu robustného riadenia pre decentralizované riadenie,
- riadenie systémov s dopravným oneskorením.

Nasledujúce kapitoly sú vypracované na základe nadobudnutých poznatkov, ktorých prehľad je v predchádzajúcich kapitolách. Uvádame v nich získané výsledky pre návrh robustného riadenia v časovej oblasti, ktoré sú pôvodným prínosom dizertačnej práce, väčšinu z nich sme publikovali v prácach, citovaných v jednotlivých častiach.

Metodicky vychádzame z podmienok robustnej stability neurčitého systému, využívame parametricky závislú Ljapunovovu funkciu. Podmienky analýzy robustnej stability sformulované v podobe lineárnych maticových nerovnic (LMI) sa pre návrh robustného regulátora menia na bilinéarne maticové nerovnice (BMI). Pri návrhu stavovej spätnej väzby je možné ich štandardnou substitúciou pretransformovať na LMI, pri spätnej väzbe z výstupu je problém zložitejší. V tomto prípade navrhujeme viacero alternatív: priame riešenie príslušných podmienok BMI solverom, návrh rekonštruktora a stavovej spätnej väzby (LMI formulácia), *iteračné riešenie BMI cez postupnosť LMI*.

V nasledujúcich kapitolách uvádzame príklady aplikácie navrhnutých metód návrhu robustného riadenia na rôznych teoretických príkladoch a na reálnych laboratórnych systémoch: sústave jednosmerných motorčekov (uvádzame motorčky s rôznymi parametrami v rôznych pracovných oblastiach) a na hydraulickom systéme. Príklady slúžia na verifikáciu a tiež ilustráciu využiteľnosti navrhnutých postupov návrhu robustného riadenia pre reálne dynamické systémy.

4 NÁVRH REGULÁTOROV VYUŽITÍM LMI OBLASTÍ STABILITY

V tejto kapitole bude popísaný návrh regulátorov pre dynamické systémy pomocou stavovej spätnej väzby ako aj spätnej väzby z výstupu s využitím znalosti LMI oblastí stability. Návrh regulátorov bude uskutočnený v spojitaj aj diskkrétnej časovej oblasti. Je teda potrebné presne špecifikovať regióny, do ktorých budú póly URO umiestnené.

4.1 LMI oblasti stability

Štandardné voľby LMI oblastí pre spojitú (ľavá polovina komplexnej roviny (2.4)) ako aj diskrétnu (jednotková kružnica v komplexnej rovine (2.5)) časovú oblasť sú presne špecifikované v kapitole 2.1. V prípade požiadavky na zlepšenie kvality regulácie, ako sú napr. zníženie preregovania alebo zrýchlenie procesu možno definovať špeciálne oblasti stability, ktorých opis nájdeme v kapitole 2.1. Patria sem oblasti ako:

- posunutá polovina komplexnej roviny smerom doľava (2.6),
- kruh s polomerom r a stredom v bode $(q, 0)$ definovaný maticami (2.7),
- kónický sektor v ľavej polovine komplexnej roviny (2.8),

Doposiaľ spomenuté špeciálne oblasti stability nachádzajú svoje hlavné využitie v spojitaj časovej oblasti. Tieto oblasti však možno prekonvertovať aj do diskkrétnej časovej oblasti, na ktorú sa sústreďujeme v tejto časti práce. Práve v diskkrétnej oblasti sa situácia komplikuje tým, že regióny, ktoré sú konvexné v spojitaj časovej oblasti sa transformujú do nekonvexných regiónov v diskkrétnej časovej oblasti.

4.1.1 LMI regióny v diskkrétnej časovej oblasti

Uvažujme komplexne združené póly systému $s = a \pm jb$. Zodpovedajúce póly v diskkrétnej časovej oblasti možno určiť jednoduchým vzťahom z definície z -transformácie [14]

$$z = e^{sT} = e^{T(a \pm jb)} = e^{Ta} e^{\pm j b T} \quad (4.1)$$

kde T predstavuje periódu vzorkovania.

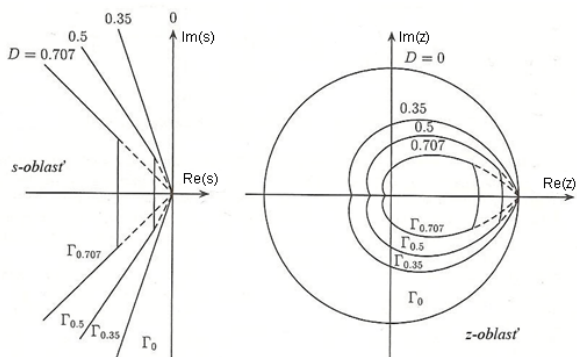
Podľa vzťahu (4.1) môže nastať niekoľko prípadov: Imaginárna os spojitaj časovej oblasti (hranica stability) sa premietne do jednotkovej kružnice v diskkrétnej oblasti. Záporná (ľavá) polovina komplexnej roviny v spojitaj oblasti (oblasť stabilných pólov - reálna zložka pólu je záporná) sa v diskkrétnej oblasti zobrazí do vnútra kružnice s polomerom $r=1$ (zahŕňa všetky asymptoticky stabilné póly), čiže modul komplexného koreňa je menší ako 1. Posunutá polovina komplexnej roviny smerom doľava o hodnotu ε (v spojitaj oblasti) sa v diskkrétnej oblasti premietne do vnútra kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ a polomerom $r = e^{\varepsilon T}$. Kladná (pravá) polovina komplexnej roviny \mathbb{C} v spojitaj oblasti (oblasť nestabilných pólov) sa zobrazí v diskkrétnej oblasti mimo jednotkovej kružnice, čiže modul komplexného koreňa je väčší ako 1. Prislúchajúca oblasť tlmenia (kónický LMI sektor) sa zo spojitaj s - oblasti premietne do diskkrétnej z - oblasti ako logaritmická špirála (krivka), ktorá predstavuje nekonvexnú oblasť. Diskrétno zobrazenie tejto oblasti pre tri rôzne hodnoty tlmenia (0.35, 0.5, 0.707) sú zobrazené na obr. 4.1.

Keďže v diskkrétnej oblasti ide v tomto prípade o nekonvexnú oblasť, čo je pre ďalšie využitie LMI prístupu nevhodné, je potrebné túto oblasť aproximovať. Podľa [1] je možné nekonvexnú oblasť (pre rôzne hodnoty tlmenia) aproximovať pomocou kružnic s polomerom r a stredom v bode $(q, 0)$, ktorých parametre sú uvedené v tab. 4.1,

D	φ	r	q
0	90°	1	0
0.35	približne 69.5°	0.5	0.5
0.5	60°	0.44	0.44
0.707	približne 45°	0.33	0.33

Tab. 4.1 Parametre aproximačnej kružnice podľa [1]

kde D predstavuje tlmenie (damping), φ ($\varphi = \arccos(D)$) je uhol kónického sektora v spojitej s -oblasti pre zadané tlmenie, r je polomer aproximačnej kružnice v z -oblasti, q je súradnica stredy aproximačnej kružnice na reálnej osi. Kružnica opísaná ako LMI oblasť bola definovaná v kapitole 2.1 maticami (2.7). V prípade uzavretého regulačného obvodu budú póly umiestnené do vnútra požadovanej kružnice.

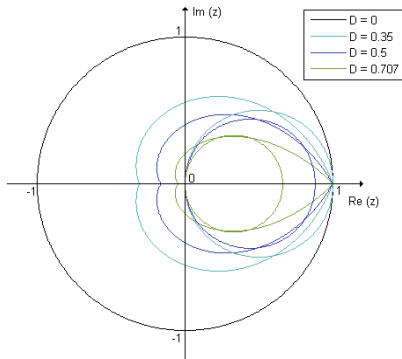


Obr. 4.1 Zobrazenie tlmenia zo spojitej časovej oblasti do diskkrétnej [1]

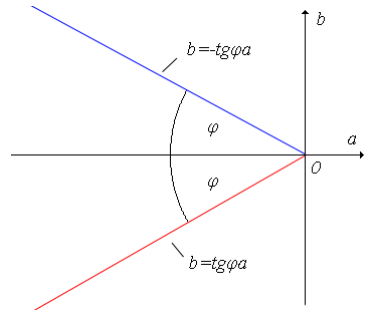
Aproximačné kružnice pre hodnoty tlmenia (D) z tab. 4.1 s rôznymi polomermi (r) sú zobrazené na obr. 4.2. Ako vidno na obrázku, aproximačné kružnice vychádzajú z oblasti tlmenia. Pri návrhu regulátora metódou Pole Placement, môžu v takomto prípade póly uzavretého regulačného obvodu prechádzať aj mimo požadovanej oblasti tlmenia.

Pre tento prípad sme vypracovali vlastný prístup k vnútornej aproximácii nekonvexnej oblasti stability v z -rovine. Za najvhodnejšie pokladáme vykonať aproximáciu vpísanou elipsou. Najskôr však treba získať opis nekonvexnej oblasti vytvorenej logaritmickou špirálou. Elipsa bude prechádzať extrémami funkcie (logaritmickej špirály) a priesečníkom špirály s reálnou osou komplexnej roviny \mathbb{C} .

Keďže vieme opísať hornú (modrú) aj dolnú (červenú) polpriamku kónického sektora v spojitej časovej oblasti z obr.4.3, použitím vzťahu (4.1) dokážeme danú krivku opísať aj v diskkrétnej časovej oblasti. Označme reálnu zložku komplexného čísla ako a , imaginárnu zložku ako b a uhol, ktorý zvierajú horná aj dolná polpriamka s reálnou osou ako φ .



Obr. 4.2 Aproximácia nekonvexnej oblasti tlmenia v diskkrétnej z-oblasti



Obr. 4.3 Kónická oblasť v s-oblasti

Obraz hornej polpriamky v z-oblasti:

Zo znalostí goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku, vieme z obr. 4.3 vyjadriť vzťah $b = -La$, kde $L = \operatorname{tg} \varphi$. Horná polpriamka je potom opísaná množinou bodov

$$(a, -La), a \leq 0 \tag{4.2}$$

Dosadením (4.2) do $s = a + jb$ získame zápis komplexného čísla v tvare $s = a - jLa$. Použitím vzťahu (4.1) možno takto zadané komplexné číslo (resp. pól systému) prepočítať zo spojitých časovej oblasti do diskkrétnej, teda

$$z = e^{sT} = e^{(a-jLa)T} = e^{aT} e^{-jLaT} \xrightarrow{t=aT} z = e^t e^{-jLt} \tag{4.3}$$

Zo znalosti exponenciálnej funkcie komplexného čísla možno vzťah (4.3) prepísať do tvaru

$$z = e^t (\cos Lt - j \sin Lt) \tag{4.4}$$

odkiaľ napokon vyjadríme parametricky zapísanú hornú polpriamku logaritmickej špirály (krivky) v diskkrétnej časovej oblasti

$$a = e^t \cos Lt, b = -e^t \sin Lt \quad t \leq 0 \tag{4.5}$$

V prípade hornej polpriamky má zmysel uvažovať argument $Lt \in [-\pi, \pi]$, teda $t \in \left[\frac{-\pi}{L}, 0 \right]$.

Obraz dolnej polpriamky v z-oblasti:

Obraz dolnej polpriamky kónickej oblasti možno vyjadriť analogicky s hornou polpriamkou, teda parametricky zápis dolnej časti logaritmickej špirály je v tvare

$$a = e^t \cos Lt, b = e^t \sin Lt \quad t \in \left[\frac{-\pi}{L}, 0 \right] \tag{4.6}$$

kde hodnota $\frac{-\pi}{L}$ predstavuje priesečník s reálnou osou.

Vzťahy (4.5) a (4.6) predstavujú parametrický opis kriviek ohraničujúcich v z-oblasti región pólův systému zodpovedajúcich danému tlmeniu.

Výpočet extrémov logaritmickej špirály:

Výpočet maximálnej hodnoty funkcie (logaritmickej špirály) získame z hornej časti krivky. Hľadáme teda stacionárne body, v ktorých má derivácia funkcie nulovú hodnotu. Z derivácií

$$\frac{db}{dt} = -e' \sin Lt - Le' \cos Lt = -e' (\sin Lt + L \cos Lt) \quad (4.7)$$

$$\frac{da}{dt} = e' \cos Lt - Le' \sin Lt = e' (\cos Lt - L \sin Lt) \quad (4.8)$$

vieme podľa [11] vyjadriť deriváciu funkcie v tvare

$$\frac{db}{da} = \frac{db}{dt} \times \frac{dt}{da} = \frac{db}{dt} \times \frac{dt}{da} = \frac{db}{dt} \times \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

Dosadením vzťahov (4.7) a (4.8) možno deriváciu (4.9) prepísať nasledovne

$$\frac{db}{da} = \frac{-e' (\sin Lt + L \cos Lt)}{e' (\cos Lt - L \sin Lt)} = \frac{-(\sin Lt + L \cos Lt)}{\cos Lt - L \sin Lt} \quad (4.10)$$

Keďže hľadáme stacionárny bod, deriváciu (4.10) položíme rovnú nule, teda

$$\frac{db}{da} = \frac{-(\sin Lt_E + L \cos Lt_E)}{\cos Lt_E - L \sin Lt_E} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \sin Lt_E + L \cos Lt_E &= 0 \\ tg Lt_E + L &= 0 \\ tg Lt_E &= -L \end{aligned}$$

Vieme, že $L = tg \varphi$, a preto

$$\begin{aligned} tg Lt_E &= -tg \varphi \quad \rightarrow \quad t_E = -\frac{\varphi}{L} = -\frac{\varphi}{tg \varphi} \\ Lt_E &= -\varphi \end{aligned}$$

Súradnice bodu, kde má logaritmická špirála svoje maximum sú

$$\begin{aligned} a_{\max} &= e^{Lt_E} \cos Lt_E = e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \cos \left(tg \varphi \left(-\frac{\varphi}{tg \varphi} \right) \right) = e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \cos(-\varphi) \\ b_{\max} &= -e^{Lt_E} \sin Lt_E = -e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \sin \left(tg \varphi \left(-\frac{\varphi}{tg \varphi} \right) \right) = -e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \sin(-\varphi) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Súradnice bodu, kde má logaritmická špirála svoje minimum budú analogicky

$$\begin{aligned} a_{\min} &= e^{Lt_E} \cos Lt_E = e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \cos \left(tg \varphi \left(-\frac{\varphi}{tg \varphi} \right) \right) = e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \cos(-\varphi) \\ b_{\min} &= e^{Lt_E} \sin Lt_E = e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \sin \left(tg \varphi \left(-\frac{\varphi}{tg \varphi} \right) \right) = e^{-\frac{\varphi}{tg \varphi}} \sin(-\varphi) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Priesečník špirály s reálnou osou komplexnej roviny:

Pravý priesečník s reálnou osou je v bode (1,0). Ľavý priesečník možno vyjadriť z parametrického vzťahu (4.5) pre argument $Lt \in [-\pi, \pi]$, teda $t \in \left[\frac{-\pi}{L}, 0 \right]$. Položíme

imaginárnu zložku b zo vzťahu (4.5) rovnú nule, teda $-e^L \sin Lt = 0$, pre $t = \frac{-\pi}{L}$. Ľavý priesečník s reálnou osou je potom v bode so súradnicami

$$(a_0, 0) = \left(-e^{-\frac{\pi}{L}} \sin L \frac{-\pi}{L}, 0 \right) = \left(-e^{-\frac{\pi}{L}} \sin -\pi, 0 \right) = \left(-e^{-\frac{\pi}{L}}, 0 \right) \quad (4.13)$$

4.1.2 Eliptický LMI región

Ako už bolo spomenuté, aproximáciu nekonvexnej logaritmickej špirály vykonáme elipsou. Elipsa bude prechádzať extrémami špirály (4.11) a (4.12) a jej priesečníkom s reálnou osou komplexnej roviny (4.13), ktoré boli vyjadrené v predchádzajúcej stati. Z nadobudnutých poznatkov vieme vyjadriť, stred elipsy ako aj jej polos.

Stred a polos elipsy:

Logaritmická špirála predstavuje krivku symetrickú podľa reálnej osi komplexnej roviny. Keďže elipsa má prechádzať extrémami špirály (4.11) a (4.12) a bodom (4.13), jej stred bude ležať v priesečníku spojnice maxima a minima špirály s reálnou osou komplexnej roviny, teda v bode so súradnicami $(a_S, 0)$. a_S možno vyjadriť zo vzťahu (4.5) pre

$t_E = -\frac{\varphi}{\text{tg}\varphi}$, potom stred elipsy bude v bode

$$(a_S, 0) = \left(e^{t_E} \cos Lt_E, 0 \right) = \left(e^{-\frac{\varphi}{\text{tg}\varphi}} \cos(-\varphi), 0 \right) \quad (4.14)$$

Môžeme povedať, že prvá súradnica bodu (4.14) $a_S = a_{\max} = a_{\min}$, pretože body (4.11), (4.12) a (4.14) ležia na spojnici extrémov, ktorá je kolmá na reálnu os. Hlavnú a vedľajšiu polos elipsy možno vyjadriť nasledovne: hlavná polos elipsy a_1 bude rovná vzdialenosti bodov $(a_S, 0)$ a $(a_0, 0)$, teda nadobudne hodnotu

$$a_1 = a_S - a_0 \quad (4.15)$$

a vedľajšia polos bude rovná vzdialenosti bodov $(a_S, 0)$ a (a_{\max}, b_{\max}) (resp. (a_{\min}, b_{\min})), teda nadobudne hodnotu

$$a_2 = b_{\max} - 0 = b_{\max} \quad (4.16)$$

Elipsu so stredom v bode (4.14) a polosami (4.15) a (4.16) môžeme definovať ako LMI oblasť nasledujúcimi maticami

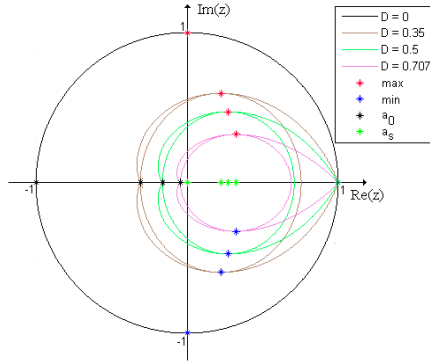
$$R_{11} = \begin{bmatrix} -1 & -a_S c \\ -a_S c & -1 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(c-d)}{2} \\ \frac{(c+d)}{2} & 0 \end{bmatrix}, R_{22} = 0^{2 \times 2}; c = \frac{1}{a_1}, d = \frac{1}{a_2} \quad (4.17)$$

Parametre aproximačných elips pre hodnoty tlmenia z tab. 4.1 sú uvedené v tab. 4.2 a ich zobrazenie nájdeme v obr. 4.4. Ako vidno na obrázku, aproximačné elipsy sa nachádzajú vo vnútornej oblasti logaritmickej špirály. Možno teda povedať, že pri návrhu regulátora

metódou Pole Placement budú všetky póly URO vpísané do danej oblasti a nebudú prechádzať mimo špirály.

D	φ	a_1	a_2	a_s
0	90°	1	1	0
0.35	približne 69.5°	0.5316	0.5953	0.2224
0.5	60°	0.4362	0.4731	0.2731
0.707	približne 45°	0.3656	0.3225	0.3224

Tab. 4.2 Parametre aproximačnej elipsy



Obr. 4.4 Aproximácia nekonvexnej oblasti tlmenia v diskkrétnej z-oblasti

4.2 Návrh stavovej spätnej väzby v diskkrétnej oblasti

V tejto stati vykonáme návrh stavovej spätnej väzby v diskkrétnej časovej oblasti, kde využijeme aproximáciu logaritmickkej špirály elipsou, ktorá bola vyjadrená ako LMI oblasť v predchádzajúcej kapitole. Kvalita riadenia bude ovplyvnená zvolenou hodnotou tlmenia.

Uvažujme lineárny časovo invariantný neurčitý diskrétny dynamický systém (2.9) kde $A(\alpha)$ a $B(\alpha)$ predstavujú matice neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je uvedený vo vzťahoch (2.10) a (2.11).

Hľadáme stavové spätnoväzobné zosilnenie F tak, aby matica URO $A(\alpha) + B(\alpha)F$ bola robustne stabilná pre všetky $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ a $B(\alpha) \in \mathcal{B}$. Póly URO môžu byť robustne umiestnené do požadovanej LMI oblasti použitím podmienok \mathcal{D}_κ stability.

Veta 4.1 ([18])

Ak existujú také matice $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{q \times n}$ a N symetrických kladne definitných matíc P_i , pre ktoré platí nasledujúci vzťah

$$M_{\mathcal{D}_\kappa}(A_i, P_i) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

kde $M_{11} = R_{11} \otimes P_i + R_{12} \otimes (A_i H + B_i S) + R_{12}^T \otimes (A_i H + B_i S)^T$, $M_{22} = R_{22} \otimes (P_i - H - H^T)$,

$M_{12} = R_{12}^T \otimes (P_i - H^T) + R_{22} \otimes (A_i H + B_i S)$, potom polytopický lineárny systém (2.9) je robustne \mathcal{D}_R stabilizovateľný stavovou spätnou väzbou so zosilnením

$$F = SH^{-1} \quad (4.19)$$

Požiadavkou bude umiestnenie pólov URO do oblasti logaritmickkej špirály zodpovedajúcej príslušnej hodnote tlmenia aproximovanej elipsou. Efektívnosť metódy je v dizeračnej práci ilustrovaná na jednom teoretickom príklade, v ktorom je vykonaný návrh stavovej spätnej väzby s umiestnením pólov do požadovanej oblasti pre 50 nestabilných náhodne vygenerovaných systémov. Výsledky z tejto časti boli čiastočne publikované v práci [28], kde bola vykonaná aproximácia nekonvexnej špirály pomocou experimentálnej kružnice.

4.3 Návrh stavovej spätnej väzby a rekonštruktora stavov pre spojitý systém

Úlohou je navrhnuť stavový regulátor pre reálny proces, ktorého stavy však nie sú merateľné. Vzhľadom na túto skutočnosť vykonáme návrh rekonštruktora stavových veličín neurčitého systému. Kvalitu riadenia ovplyvníme umiestnením pólov URO do špecifických LMI oblastí.

Uvažujme lineárny časovo invariantný neurčitý spojitý dynamický systém (2.9), kde $A(\alpha)$ a $B(\alpha)$ predstavujú matice neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je uvedený vo vzťahoch (2.10) a (2.11).

Pre návrh regulátora od stavovej spätnej väzby uvažujme algoritmus riadenia v tvare

$$u(t) = Fx(t) \quad (4.20)$$

kde F predstavuje jednoduché stavové spätnoväzobné zosilnenie. Systém (2.9) s algoritmom riadenia (4.20) možno prepísať ako URO so spätnou väzbou od stavov takto

$$\dot{x}(t) = A_c(\alpha)x(t) \quad (4.21)$$

kde

$$\mathcal{A} := \left\{ A_c(\alpha) : A_c(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ci}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, A_{ci} = A_i + B_i K \quad (4.22)$$

V tejto kapitole použijeme pri návrhu regulátora Ljapunovovu funkciu s premenlivými parametrami $P(\alpha)$ (2.16), ktorá zabezpečí zmiernenie konzervativizmu. Pri návrhu stavového regulátora ako aj rekonštruktora stavov bude použitá podmienka robustnej \mathcal{D}_R stability (2.17), ktorá hovorí, že polytopický systém je robustne \mathcal{D}_R stabilný vtedy a len vtedy, ak existujú také matice $H \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $G \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, F a N symetrických kladne definitných matíc P_i , pre ktoré platí nasledujúci vzťah

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad M_{\mathcal{D}_R}(A_{ci}, P_i) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

$$M_{11} = R_{11} \otimes P_i + H(I_d \otimes A_{ci}) + (I_d \otimes A_{ci}^T)H^T, M_{12} = R_{12} \otimes P_i + (I_d \otimes A_{ci}^T)G - H, M_{22} = R_{22} \otimes P_i - G - G^T.$$

Cieľom je umiestnenie pólov URO do predpísaného regiónu v komplexnej rovine, ktorý je definovaný maticami R_{11} , R_{12} a R_{22} . Región, do ktorého chceme umiestniť póly URO volíme vzhľadom k požiadavke kvality regulácie.

4.3.1 Návrh rekonštruktora stavov systému

V prípade, že chceme navrhnúť stavový regulátor pre systém, ktorého stavy nie sú merateľné, je potrebné vykonať deterministický odhad stavu systému. Odhad je možné realizovať návrhom tzv. rekonštruktora, ktorý sa používa na rekonštrukciu vektora stavových veličín.

Predpokladajme, že pre $\forall \alpha \in \mathcal{A}, \mathcal{B}$ je $(A(\alpha), B(\alpha))$ riaditeľný a $(A(\alpha), C)$ pozorovateľný pár. Rekonštruktor možno podľa [16, 17] opísať rovnicou v tvare

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(\alpha)\tilde{x}(t) + B(\alpha)u(t) + F_x(\alpha)(y(t) - \tilde{y}(t)) \quad (4.24)$$

kde $\mathcal{F} := \left\{ F_x(\alpha) : F_x(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_{xi}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$, $F_{xi} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ predstavuje maticu rekonštruktora, $y(t) = Cx(t)$ a $\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t)$ predstavujú vektor výstupných veličín systému (2.9) a rekonštruktora (4.24). Chybu odhadu rekonštrukcie vektora stavových veličín možno vyjadriť odčítaním (4.24) od (2.9) takto

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_x(\alpha)\varepsilon(t) \quad (4.25)$$

kde $\mathcal{A} := \left\{ A_x(\alpha) : A_x(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{xi}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$, $A_{xi} = A_i - F_{xi}C$.

Asymptotická konvergencia chyby $\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ k nule je zabezpečená ak všetky vlastné čísla matice A_{xi} , $i = 1, \dots, N$ ležia v ľavej polovine komplexnej roviny \mathbb{C} (v spojitých časovej oblasti). Asymptotická konvergencia k nule chyby odhadu vektora stavových veličín je zabezpečená využitím podmienok robustnej \mathcal{D}_x stability (2.17) ako v (4.23).

Návrh rekonštruktora vektora stavových veličín F_x ako aj stavového spätnoväzobného zosilnenia F je v dizertačnej práci vykonaný pre reálny model laboratórneho jednosmerného motorčeka ako v článku [33], kde je systém aj podrobne popísaný.

4.4 Návrh PI regulátora pomocou spätnej väzby z výstupu

Predpokladajme, že kvalitu riadenia ovplyvníme umiestnením pólov URO do špecifických LMI oblastí bez kritériálnej funkcie. Uvažujme lineárny časovo invariantný neurčitý spojitý dynamický systém (2.9), kde $A(\alpha)$ a $B(\alpha)$ predstavujú matice neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je uvedený vo vzťahoch (2.10) a (2.11).

Uvažujme riadiaci algoritmus PI regulátora v tvare

$$u(t) = K_P y(t) + K_I \int_0^t y(t) dt \quad (4.26)$$

označme $z(t) = \int_0^t y(t) dt$ a $X(t) = [x^T(t) \ z^T(t)]^T$, algoritmus riadenia (4.26) so spätnou väzbou z výstupu potom môžeme prepísať nasledovne

$$u(t) = FC_n X(t) \quad (4.27)$$

kde $F = [K_P \ K_I]$ a $C_n = \text{diag}\{C, I\}$, $I \in \mathbb{R}^{k \times l}$. Uzavretý regulačný obvod s PI regulátorom nadobudne podľa [36, 38] nasledovný tvar

$$\dot{X}(t) = A_n(\alpha)X(t) + B_n(\alpha)u(t) \quad (4.28)$$

kde $A_n(\alpha)$ a $B_n(\alpha)$ predstavujú matice rozšíreného neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je nasledovný

$$\mathcal{A} := \left\{ A_n(\alpha) : A_n(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ni}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, A_{ni} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\mathcal{B} := \left\{ B_n(\alpha) : B_n(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{ni}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, B_{ni} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Systém (4.28) s PI algoritmom riadenia (4.27) môže byť prepísaný ako uzavretý regulačný obvod so spätnou väzbou z výstupu

$$\dot{X}(t) = A_c(\alpha)X(t) \quad (4.31)$$

kde

$$\mathcal{A} := \left\{ A_c(\alpha) : A_c(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ci}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, A_{ci} = A_{ni} + B_{ni} FC_n \quad (4.32)$$

Pri návrhu regulátora budeme vychádzať z podmienky robustnej $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stability (4.23) s parametricky závislou Ljapunovovou funkciou $P(\alpha)$ (2.16). Cieľom je umiestnenie pólov URO do predpísaného regiónu v komplexnej rovine. Región, do ktorého chceme umiestniť póly URO volíme vzhľadom k požiadavke kvality regulácie.

Návrh PI regulátora je v dizertačnej práci vykonaný pre reálny laboratórny hydraulický systém (nádrž) ako v článku [36], kde je systém aj podrobne popísaný.

Treba poznamenať, že pri spätnej väzbe od stavov je z teoretického hľadiska vždy možné umiestniť póly do ľubovoľnej predpísanej oblasti (za predpokladu riaditeľnosti systému), kým pre spätnú väzbu z výstupu to vo všeobecnosti nie je možné. Vychádzame z predpokladu, že systém je stabilizovateľný spätnou väzbou z výstupu. Umiestnenie pólov do istého regiónu potom tiež nie je zaručene realizovateľné. V takom prípade predpísanú oblasť pólov postupne zužujeme (postupne zvyšujeme tlmenie a stupeň stability).

5 ÚLOHY S OHRANIČENÍM AKČNÉHO ZÁSAHU

Ohraničenie vstupného signálu je prirodzenou požiadavkou pri riadení reálnych procesov. Kapitola obsahuje výsledky, ktoré prezentujú úlohy s ohraničením akčného zásahu pomocou elipsoidálnych invariantných množín [12], ktoré sa využívajú najmä v oblasti prediktívneho riadenia.

5.1 Ohraničenie vstupu invariantnou množinou

Majme lineárny časovo invariantný dynamický systém (2.9), kde vektor vstupných (riadiacich) veličín $u(t) \in \mathbb{R}^m$ je ohraničený takto

$$\Gamma = \{u(t) \in \mathbb{R}^m : |u_i(t)| \leq U_i, i = 1, \dots, m\} \quad (5.1)$$

Uvažujme stabilizačný spätnoväzobný zákon riadenia v tvare

$$u(t) = Lx(t) \quad (5.2)$$

kde $L = \begin{cases} F, & \text{pre spätnú väzbu od stavov} \\ FC, & \text{pre spätnú väzbu z výstupu} \end{cases}$, ktorý zabezpečí, že pre každý počiatočný stav

$x(0) \in \Omega(P(\alpha))$, riadenie $u(t)$ zotrvá v množine (5.1) pre $\forall t \geq 0$. $\Omega(P(\alpha))$ predstavuje elipsoidálnu Ljapunovovu množinu definovanú nasledovne

$$\Omega(P(\alpha)) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x^T(t)P(\alpha)x(t) \leq \sigma\} \quad (5.3)$$

kde σ predstavuje kladné reálne číslo (skalár), ktoré určuje veľkosť množiny $\Omega(P(\alpha))$.

Definícia 5.1 ([4])

Podmnožina $S \in \mathbb{R}^n$ je pozitívne invariantnou množinou pre dynamický systém (2.9) s algoritmom riadenia (5.2) vtedy a len vtedy, ak pre každý počiatočný stav $x(0) \in S$, trajektória stavu $x(t)$ zotrváva naďalej v množine S pre $\forall t \geq 0$.

Uvážením algoritmu riadenia možno podľa [23] vyjadriť ohraničenie takto

$$\mathcal{L}(L) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |D_i Lx(t)| \leq U_i, i = 1, \dots, m\}; D_i \in \mathbb{R}^{1 \times m}, d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}; j = \{1, \dots, m\} \quad (5.4)$$

Potom ohraničenie vektora vstupných veličín možno podľa Vety 5.1 definovať ako LMI.

Veta 5.1 ([23])

Podmnožina $\Omega(P(\alpha)) \subseteq \mathcal{L}(L)$ je pre zákon riadenia (5.2) ekvivalentná s podmienkou

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & L^T D_j^T \\ * & \lambda_j \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, \dots, m; \lambda_j \in \left[0, \frac{U_j^2}{\sigma}\right] \quad (5.5)$$

Ako už bolo spomenuté, pri spätnej väzbe od stavov je z teoretického hľadiska takmer vždy možné umiestniť póly do ľubovoľnej predpísanej oblasti, kým pre spätnú väzbu z výstupu to vo všeobecnosti nie je zaručene realizovateľné.

5.2 Návrh stavovej spätnej väzby

Cieľom je navrhnúť regulátor podľa kapitoly 4.3 tak, aby sa dodržalo predpísané ohraničenie akčného zásahu podľa (5.5). V prípade, že navrhujeme stavový regulátor pre reálny model, ktorého stavy nie sú merateľné, vykonáme návrh rekonštruktora stavových veličín neurčitého systému ako v kapitole 4.3. Kvalita regulácie závisí od zvolenej LMI oblasti, do ktorej budú umiestnené póly URO. Región, do ktorého chceme umiestniť póly URO volíme vzhľadom k požiadavke kvality regulácie.

Návrh rekonštruktora vektora stavových veličín F_x ako aj stavového spätnoväzobného zosilnenia F je v dizertačnej práci vykonaný pre reálny model laboratórneho jednosmerného motorčeka z článku [40] ako v kapitole 4.3.

5.3 Návrh PI regulátora pomocou spätnej väzby z výstupu

Cieľom je navrhnúť PI regulátor so spätnou väzbou z výstupu (viď. kapitola 4.4) bez definovaných špecifických LMI oblastí (uvažujeme ľavú polrovinu komplexnej roviny pre časovo-spojité systémy) tak, aby sa dodržalo predpísané ohraničenie akčného zásahu (5.5). Kvalita riadenia bude zabezpečená uvažovaním štandardnej kvadratickej kritériálnej funkcie

$$J = \int_0^{\infty} J(t) dt \quad (5.6)$$

kde $J(t) = X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t) + \dot{X}^T(t)S\dot{X}(t)$ a Q, R, S sú symetrické kladne definitné matice.

Definícia 5.2

Majme neurčitý systém (2.9) s kritériálnou funkciou (5.6). Riadenie, pre ktoré dosiahnutá hodnota účelovej funkcie (kritéria kvality) neprekročí zadanú hodnotu, teda $J \leq J_0$, potom nazývame riadením so zaručenou hodnotou účelovej funkcie (kritéria kvality).

Návrh PI regulátora je v dizertačnej práci vykonaný pre reálny model laboratórneho jednosmerného motorčeka z článku [38].

6 ROBUSTNÉ DECENTRALIZOVANÉ RIADENIE

Jedným z hlavných problémov riadenia zložitých systémov je rozsiahlosť takéhoto systému, čo môže viesť k neriešiteľnosti úlohy. Decentralizované riadenie predstavuje efektívny nástroj na riadenie zložitých systémov, pri ktorom je riadený systém rozdelený na M podsystémov a celá úloha riadenia sa dekomponuje, takže jednotlivé podsystémy je potom možné riadiť relatívne samostatne. V poslednej dobe bola pre decentralizované riadenie vo frekvenčnej oblasti vypracovaná metóda ekvivalentných podsystémov [13], na základe ktorej bude spracovaná aj táto kapitola. Základnou úlohou pri tomto prístupe je navrhnúť schému decentralizovaného riadenia tak, aby regulátory pre jednotlivé ekvivalentné podsystémy boli navrhované samostatne. Možno teda ovplyvňovať kvalitu riadenia jednotlivých podsystémov so zachovaním robustnej stability a kvality riadenia celého systému.

6.1 Formulácia decentralizovaného riadenia

Uvažujme zložitý systém pozostávajúci z M podsystémov, ktorých opis je v tvare

$$\begin{aligned} S_j : \dot{x}_j(t) &= A_{jj}(\alpha)x_j(t) + B_{jj}(\alpha)u_j(t) \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M (A_{jk}(\alpha)x_k(t) + B_{jk}(\alpha)u_k(t)) \quad j=1, \dots, M \\ y_j(t) &= C_j x_j(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

kde $x_j(t) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $u_j(t) \in \mathbb{R}^{m_j}$ a $y_j(t) \in \mathbb{R}^{l_j}$ sú vektory stavových, vstupných (riadiacích) a výstupných veličín podsystemu. Matice $A_{jj}(\alpha)$, $B_{jj}(\alpha)$, $A_{jk}(\alpha)$, $B_{jk}(\alpha)$ a C_j predstavujú matice príslušných rozmerov polytopického systému (6.1). $A_{jj}(\alpha)$ a $B_{jj}(\alpha)$ predstavujú matice podsystemu, $A_{jk}(\alpha)$ a $B_{jk}(\alpha)$ sú matice interakcií podsystemov.

Uvažujme teraz zložitý systém, ktorý obsahuje M podsystemov (2.9); kde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a $y(t) \in \mathbb{R}^l$ predstavujú vektory stavových, vstupných (riadiacích) a výstupných veličín celého systému s rozmermi $n = \sum_{j=1}^M n_j$, $m = \sum_{j=1}^M m_j$ a $l = \sum_{j=1}^M l_j$:

$x(t) = (x_1^T(t) \ x_2^T(t) \ \dots \ x_N^T(t))^T$, $u(t) = (u_1^T(t) \ u_2^T(t) \ \dots \ u_N^T(t))^T$, $y(t) = (y_1^T(t) \ y_2^T(t) \ \dots \ y_N^T(t))^T$. $A(\alpha)$ a $B(\alpha)$ predstavujú matice neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je uvedený vo vzťahoch (2.10) a (2.11), odkiaľ matice A_i a B_i možno zapísať takto

$$\begin{aligned} A_i &= A_{di} + A_{mi} \\ B_i &= B_{di} + B_{mi} \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N \quad (6.2)$$

kde $A_{di} = \text{diag}\{A_{jj}^i\}$, $B_{di} = \text{diag}\{B_{jj}^i\}$ pre $j = 1, \dots, M$ predstavujú diagonálne matice príslušných podsystemov, A_{mi} a B_{mi} sú mimo diagonálne matice celého systému, ktoré zodpovedajú maticiam interakcií jednotlivých podsystemov. $C = \text{diag}\{C_j\}$, $j = 1, \dots, M$ je blokovo diagonálna matica.

Hlavnou úlohou návrhu decentralizovaného riadenia je nájsť stabilizačnú blokovo-diagonálnu spätnoväzobnú maticu F (spätná väzba od vektora stavových veličín alebo z výstupu) pre spojený systém (2.9), ktorej návrh je založený na myšlienke ekvivalentných podsystemov [13]. Problematika návrhu regulátora sa tak stáva problémom na úrovni podsystemov. Pri návrhu regulátorov na úrovni podsystemov možno postupovať ako v prípade návrhu stavového regulátora, resp. PI regulátora so spätnou väzbou z výstupu ako v predchádzajúcich kapitolách.

Uvažujme stabilizačný spätnoväzobný zákon riadenia pre j -ty podsystem v tvare

$$u_j(t) = Lx_j(t) \quad (6.3)$$

kde $L = \begin{cases} F, & \text{pre spätnú väzbu od stavov} \\ FC, & \text{pre spätnú väzbu z výstupu} \end{cases}$, $F = \text{diag}\{F_j\}$, $C = \text{diag}\{C_j\}$, $j = 1, \dots, M$.

URO celého systému (2.9) s algoritmom riadenia možno napísať v tvare

$$\dot{x}(t) = (A_{dc}(\alpha) + A_{mc}(\alpha))x(t) \quad (6.4)$$

kde

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} A_{dc}(\alpha) : A_{dc}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{diag} \{ A_{cij}^i \} \\ A_{mc}(\alpha) : A_{mc}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{diag} \{ A_{cjk}^i \} \end{array} , \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (6.5)$$

$$j, k = 1, \dots, M$$

A_{cij}^i a $A_{cjk}^i, j \neq k$ predstavujú matice URO jednotlivých podsystémov a ich interakcií v i -tom vrchole polytopického systému.

Uvažujme teraz URO izolovaného j – teho podsystému bez interakcií v tvare

$$\dot{x}_j(t) = A_{cij}(\alpha) x_j(t) \quad (6.6)$$

kde A_{cij} je matrica URO j – teho podsystému.

Pri návrhu stabilizačnej spätnoväzobnej matice F budeme vychádzať z podmienky robustnej $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stability (2.17) s parametricky závislou Ljapunovovou funkciou $P_j(\alpha)$ (2.16), ktorá hovorí, že polytopický systém (6.6) je robustne $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stabilný vtedy a len vtedy, ak existujú také matice $H_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ a N symetrických kladne definitných matíc P_j^i , pre ktoré platí nasledujúci vzťah

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad M_{\mathcal{D}_{\mathcal{R}}}(A_{cij}^i, P_j^i) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.7)$$

kde $M_{11} = R_{11} \otimes P_j^i + H_j (I_d \otimes A_{cij}^i) + (I_d \otimes (A_{cij}^i)) H_j^T$, $M_{12} = R_{12} \otimes P_j^i + (I_d \otimes (A_{cij}^i))^T G_j - H_j$,

$M_{22} = R_{22} \otimes P_j^i - G_j - G_j^T$ a I_d predstavuje jednotkovú maticu s rozmerom $d \times d$.

Región definovaný maticami R_{11} , R_{12} a R_{22} , do ktorého chceme umiestniť póly URO jednotlivých podsystémov volíme vzhľadom k požiadavke kvality regulácie. Poznamenajme, že matice H_j a G_j nemajú predpísanú žiadnu špeciálnu formu, do podmienky robustnej $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stability sú zaradené z dôvodu zmiernenia konzervativizmu. Do podmienky robustnej $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stability (6.7) môže byť zabudovaná kvadratická kritériálna funkcia ako v [21].

Obráťme teraz pozornosť na stabilitu celého systému. Nasledujúce výsledky týkajúce sa vlastných čísel matice využijeme pri návrhu decentralizovaného regulátora s ohľadom na interakcie podsystémov.

Veta 6.1 ([8])

Majme maticu

$$A = \{a_{jk}\}_{j,k=1,\dots,n} \quad (6.8)$$

kde $a_{jk} : \begin{cases} a_{jk} > 0, & j = k \\ a_{jk} \leq 0, & j \neq k \end{cases}$. Ak A je kladne diagonálne dominantná matica, teda

$a_{jj} > \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}|$, potom A je \mathcal{M} -maticou; jednou z vlastností \mathcal{M} -matice je, že všetky jej

vlastné čísla majú kladnú reálnu časť.

Dôsledkom uvedenej vety je nasledujúce tvrdenie. Matica A je stabilná ak je záporne diagonálne dominantná.

Veta 6.2 (zovšeobecnená Gershgorinova kružnica podľa [8])

Majme štvorcovú maticu A rozdelenú na bloky (A_{ij}) . Ak $c_1, \dots, c_{\mathcal{M}}$ sú také kladné čísla, že nasledujúca matica

$$\begin{bmatrix} c_1 & -\|A_{12}\| & \cdots & -\|A_{1\mathcal{M}}\| \\ -\|A_{21}\| & c_2 & \cdots & -\|A_{2\mathcal{M}}\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\|A_{\mathcal{M}1}\| & -\|A_{\mathcal{M}2}\| & \cdots & c_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

je \mathcal{M} -maticou, potom všetky vlastné čísla matice A ležia v regióne

$D_j = \{z : r(A_{jj} - zI_j) \leq c_j, j=1, \dots, \mathcal{M}\}$, kde $r(\cdot)$ je miera regularity štvorcovej matice. Ak

je matica A singulárna, potom $r(A) = 0$. Ak je nesingulárnou, potom $r(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Veta 6.3 ([15])

Majme štvorcovú maticu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s n vlastnými číslami $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ a maticu $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Každé vlastné číslo súčtu $A+B$ potom leží v jednom z kruhov:

$$|z - \mu_j| \leq r, \quad r = \|B\| \nu(A) \quad (6.10)$$

kde $\|B\|$ je norma matice B a $\nu(A)$ je podmienenosť (číslo podmienenosti) matice T ,

ktorá transformuje maticu A na diagonálnu maticu, t.j. $T^{-1}AT = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$. Keď

A je normálna matica ($A^T A = A A^T$), potom $\nu(A) = 1$.

Uvažujme teraz Euklidovskú normu matice: $\|T\|$ je rovná najväčšiemu singulárnemu číslu matice T a príslušné číslo podmienenosti je dané podielom najväčšieho a najmenšieho singulárneho čísla matice T .

Poznamenajme, že v prípade celého (zložitého) systému, pozostávajúceho zo všetkých podsystémov, predstavujú matice A a B z Vety 6.3 blokovo diagonálnu maticu A_{dc} a maticu interakcií A_{mc} .

Uvažujme systém (6.4), označme $A = A_{dc}(\alpha)$ a $B = A_{mc}(\alpha)$. Ak je matica systému A robustne stabilná (t.j. stabilná pre všetky hodnoty parametra alfa), potom $A+B$ bude robustne stabilná matica ak v zmysle Vety 6.3 pre matice A a B platí

$0 < r < \text{abs}(\max(\text{real}(\text{eig}(A))))$. Hodnotu r možno získať minimalizáciou $\|B\|$, $\nu(A) \rightarrow 1$ a $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) < 0$. Pre každý podsystém (6.6) možno definovať ekvivalentný podsystém takto

$$A_{jj}^{eq}(\alpha) = A_{jj}(\alpha) + p(\alpha)I_j, \quad j = 1, \dots, M \quad (6.11)$$

kde I_j je jednotková matica rovnakého rozmeru ako A_{jj} ; $p(\alpha)$ predstavuje parameter ohraničenia interakcií, ktorý možno použiť ako ladiaci parameter. Otázka ako voliť hodnotu parametra $p(\alpha)$ je stále otvorenou problematikou. V tejto časti použijeme parameter rovný norme mimodiagonálnej (interakčnej) matice $A_m(\alpha)$.

6.2 Postup návrhu regulátorov

Návrh decentralizovaného regulátora pre zložitý systém vychádza z myšlienky návrhu regulátorov pre jednotlivé izolované ekvivalentné podsystémy (6.11) [13], na základe ktorej je postavený aj nasledujúci postup návrhu regulátorov. Uvažujeme taktiež koncept založený na stupni stability jednotlivých podsystémov a využití *Vety 6.2*, resp. *Vety 6.3*.

Stavové spätnoväzobné zosilnenie

Uvažujme teraz stabilizačný spätnoväzobný zákon riadenia pre j -ty podsystém v tvare (6.3) kde $L = F_j$. URO celého systému s algoritmom riadenia potom bude v tvare (6.4), kde

$$A_{cij}^i = A_{jj}^i + B_{jj}^i F_j, \quad j = k \quad j, k = 1, \dots, M; \quad i = 1, \dots, N \quad (6.12)$$

$$A_{cjk}^i = \begin{cases} 0, & j = k \\ A_{jk}^i + B_{jk}^i F_j, & j \neq k \end{cases}$$

PI regulátor so spätnou väzbou z výstupu

Uvažujme PI algoritmus v tvare

$$u_j(t) = K_{pj}y_j(t) + K_{ij} \int_0^t y_j(t) dt \quad (6.13)$$

označme $z_j(t) = \int_0^t y_j(t) dt$ a $X_j(t) = [x_j^T(t) \quad z_j^T(t)]^T$, stabilizačný spätnoväzobný zákon riadenia pre j -ty podsystém (6.3) so spätnou väzbou z výstupu potom môžeme prepísať nasledovne

$$u_j(t) = F_j C_{nj} X_j(t) \quad (6.14)$$

kde $F_j = [K_{pj} \quad K_{ij}]$ a $C_{nj} = \text{diag}\{C_j, I_j\}$. Potom matice rozšíreného j -teho podsystému $A_{nj}(\alpha)$ a $B_{nj}(\alpha)$ budú v tvare

$$A_{nj_k}(\alpha) = \begin{cases} \begin{bmatrix} A_{jj}(\alpha) & 0 \\ C_j & 0 \end{bmatrix}, & j = k \\ \begin{bmatrix} A_{jk}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & j \neq k \end{cases}; B_{nj_k}(\alpha) = \begin{bmatrix} B_{jk}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}; j, k = 1, \dots, M \quad (6.15)$$

URO celého (rozšíreného) systému s algoritmom riadenia potom bude v tvare (6.4), kde

$$A_{c_{ij}}^i = A_{n_{ij}}^i + B_{n_{ij}}^i F_j C_{n_{ij}} \\ A_{c_{jk}}^i = \begin{cases} 0, & j = k \\ A_{n_{jk}}^i + B_{n_{jk}}^i F_j C_{n_{ij}}, & j \neq k \end{cases} \quad j, k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N \quad (6.16)$$

Majme parameter $\rho_{jk}^i = \|A_{jk}^i + B_{jk}^i F_j\|; j, k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N$ v prípade stavového spätnoväzobného riadenia alebo $\rho_{jk}^i = \|A_{n_{jk}}^i + B_{n_{jk}}^i F_j C_{n_{ij}}\|; j, k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N$ v prípade PI algoritmu riadenia so spätnou väzbou z výstupu. Na stabilizáciu systému decentralizovaným riadením využijeme *Vetu 6.2*. Aby sme splnili predpoklady tejto vety, treba zabezpečiť diagonálnu dominantnosť matice (6.9). Aby sme to dosiahli, je vhodné minimalizovať parameter ρ_{jk}^i (mimodiagonálne prvky) a zároveň zvyšovať stupeň stability podsystémov v diagonále matice A .

Z predchádzajúceho možno navrhnúť nasledujúci (čistočne heuristický) postup na návrh regulátora pre zložitý systém:

- 1) Vypočítame parameter ohraničenia interakcií $p(\alpha)$, $p(\alpha) \approx \|A_m(\alpha)\|$.
- 2) Pomocou parametra $p(\alpha)$ vyjadríme ekvivalentný podsystém (6.11) v tvare

$$A_{c_{jj}}^i + p^i I_j, \quad j = 1, \dots, M \quad (6.17)$$

- 3) Pre každý ekvivalentný podsystém navrhne regulátor z podmienky robustnej $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ stability (6.7) s dodržaním podmienky

$$\begin{bmatrix} (\rho_{jk}^i)^2 I_{jk} & (A_{c_{jk}}^i)^T \\ A_{c_{jk}}^i & I_{jk} \end{bmatrix} > 0 \quad j \neq k \\ j, k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N \quad (6.18)$$

a s minimalizáciou stopy matice D_j^i kde $D_j^i = \text{diag}\{\rho_{jk}^i\}$, $i \neq j$. Podmienka (6.18) je podmienkou pre ohraničenie normy mimodiagonálnych prvkov matice (6.9).

- 4) Po navrhnutí regulátorov pre ekvivalentné podsystémy, skontrolujeme robustnú stabilitu celého systému. Ak URO zložitého systému s decentralizovaným regulátorom nie je robustne stabilný, opakujeme postup návrhu pre zvýšenie hodnotu parametra $p(\alpha)$.

V dizertačnej práci sú uvedené dva príklady na návrh robustného decentralizovaného riadenia. V prvom je navrhnuté decentralizované riadenie so spätnou väzbou od vektora stavových veličín pre sústavu bojlerov a turbín ako v práci [34]. V druhom príklade je navrhnutý decentralizovaný PI regulátor so spätnou väzbou z výstupu pre systém zložený

z dvoch laboratórnych jednosmerných motorčekov ako v práci [35]. Je uvedené porovnanie návrhu robustného decentralizovaného PI regulátora na úrovni podsystémov s návrhom robustného regulátora pre celý systém (MIMO systém).

7 RIADENIE SYSTÉMOV S DOPRAVNÝM ONESKORENÍM

Uvažujme sieťové riadiace systémy (Networked Control Systems), ktoré sú definované ako spätnoväzobné systémy, kde spätnoväzobná slučka je uzavretá priamo cez sieť pracujúcu v reálnom čase [24]. Takéto riadenie napriek svojim veľkým výhodám prináša aj množstvo nevýhod. Jedným z hlavných problémov je dopravné (časové) oneskorenie vyvolané sieťou, ktoré spôsobuje nemalé komplikácie v oblasti riadenia (oscilácie a nestabilitu). Pojem dopravné oneskorenie však nie je problém jedného systému, vyskytuje sa v každodennom živote a v rôznych oblastiach riadenia. Zmiernenie konzervativizmu pri návrhu regulátora zabezpečíme využitím diskretizovanej formy Ljapunovov-Krasovského funkcionálu, vďaka ktorému možno celý interval časového oneskorenia rozdeliť na niekoľko častí rovnakej dĺžky.

7.1 Systém s dopravným oneskorením a PI algoritmom riadenia

Uvažujme nasledujúci neurčitý lineárny dynamický systém s dopravným oneskorením

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + A_{del}(\alpha)x(t - \tau(t)) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau_M, 0]\end{aligned}\tag{7.1}$$

kde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor stavových veličín, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor vstupných (riadiacich) veličín a $y(t) \in \mathbb{R}^l$ vektor výstupu. $A(\alpha)$ a $B(\alpha)$ predstavujú matice neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je uvedený vo vzťahoch (2.10) a (2.11). Konvexný polytopický opis matice oneskorenia systému $A_{del}(\alpha)$ je nasledovný

$$\mathcal{A} := \left\{ A_{del}(\alpha) : A_{del}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{del,i}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\},\tag{7.2}$$

τ_M je maximálna hodnota oneskorenia a $\phi(t)$ je spojitá diferencovateľná funkcia. Predpokladajme, že komunikačná sieť reálneho času („real-time“) je integrovaná do spätnej väzby regulačného obvodu (7.1), ktorá indukuje oneskorenie $\tau(t)$ z intervalu $0 < \tau(t) \leq \tau_M$ a časová derivácia $\dot{\tau}(t)$ je z intervalu $|\dot{\tau}(t)| \leq \mu \leq 1$.

Uvažujme teraz PI algoritmus riadenia pre systém (7.1) v tvare

$$u(t) = K_p y(t - \tau(t)) + K_i \int_0^t y(t - \tau(t)) dt\tag{7.3}$$

Použitím $z(t) = \int y(t - \tau(t)) dt$ a Newton-Leibnizovej formuly získame

$$x(t - \tau(t)) = x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds\tag{7.4}$$

PI algoritmus riadenia (7.3) možno teraz prepísať do tvaru

$$u(t) = FC_n X(t) - F_p C_p \int_{t-\tau(t)}^t \dot{X}(s) ds \quad (7.5)$$

kde $X(t) = [x^T(t) \quad z^T(t)]^T$, $F = [K_p \quad K_I]$, $F_p = [K_p \quad 0]$, $C_n = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ a $C_p = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Uvážením vzťahu $\dot{z}(t) = C_j x(t - \tau(t)) = C_j x(t) - C_j \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds$, kde C_j je matica výstupu integrálneho spätnoväzobného systému, možno systém (7.1) rozšíriť na tvar

$$\dot{X}(t) = A_n(\alpha) X(t) + B_n(\alpha) u(t) - A_{deln}(\alpha) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{X}(s) ds \quad (7.6)$$

kde $A_n(\alpha)$, $B_n(\alpha)$ a $A_{deln}(\alpha)$ predstavujú matice rozšíreného neurčitého systému, ktorých konvexný polytopický opis je nasledujúci

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} A_n(\alpha) : A_n(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ni}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \\ A_{deln}(\alpha) : A_{deln}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{deln,i}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} A_{ni} = \begin{bmatrix} A_i + A_{del,i} & 0 \\ C_j & 0 \end{bmatrix} \\ A_{deln,i} = \begin{bmatrix} A_{del,i} & 0 \\ C_j & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (7.7)$$

$$\mathcal{B} := \left\{ B_n(\alpha) : B_n(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{ni}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, \quad B_{ni} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Poznamenajme, že rozmer vektora stavových veličín systému s PI regulátorom je rozšírený na rozmer $n := n + l$.

Uvážením požadovaného stupňa stability $\gamma > 0$ a aplikovaním PI algoritmu riadenia (7.3) na systém (7.6) môže byť uzavretý regulačný obvod so spätnou väzbou z výstupu zapísaný takto

$$\dot{X}(t) + A_c(\alpha) X(t) + A_{delc}(\alpha) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{X}(s) ds = 0 \quad (7.9)$$

kde

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} A_c(\alpha) : A_c(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ci}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \\ A_{delc}(\alpha) : A_{delc}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{delc,i}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} A_{ci} = -(A_{ni} + B_{ni} F C_n + \gamma I) \\ A_{delc,i} = A_{deln,i} + B_{ni} F_p C_p \end{array} \quad (7.10)$$

Pre dané symetrické kladne definitné matice Q a R máme účelovú funkciu v tvare (5.6).

Na analýzu robustnej stability a návrh robustného riadenia využijeme parametricky závislý Ljapunov-Krasovského funkcionál a podmienky stability uvedené v nasledujúcich definíciách a vete.

7.2 Diskretizovaný Ljapunov-Krasovského funkcionál

Na zmiernenie konzervativizmu pri analýze stability resp. pri syntéze regulátorov možno pri diskretizácii Ljapunov-Krasovského funkcionálu zaviesť delenie celkového intervalu časového oneskorenia [2, 3, 10]. Predpokladajme teraz, že časový interval $[t - \tau(t), t]$ je rozdelený na K častí rovnoakej dĺžky. Diskretizácia sa používa s ohľadom na stavový vektor posunutý o zlomok $\frac{\tau(t)}{K}$. Diskretizáciou rozšírený vektor stavových veličín je konštruovaný podľa [2, 3] takto

$$x_j(t) = x(t_j(t)), j = \{0, \dots, K-1\} \quad (7.11)$$

kde

$$t_j(t) \begin{cases} t - \frac{1}{K} \tau(t), & j = 0 \\ t - \frac{j+1}{K} \tau(t) + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{j-k}{K} \delta_k(t), & j \geq 1 \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\delta_0(t) = \tau(t) - \tau\left(t - \frac{\tau(t)}{K}\right) = \int_{t - \frac{\tau(t)}{K}}^t \dot{\tau}(s) ds \quad 1 \leq k \leq j-1 \quad (7.13)$$

$$\delta_k(t) = \delta_{k-1}\left(t - \frac{\tau(t)}{K}\right)$$

$$\delta_k(t) \leq \frac{\tau_M \mu}{K} \quad (7.14)$$

Premenné $x_j(t)$ definované vo vzťahoch (7.11) až (7.14) možno prepísať nasledovne

$$x_j(t) = x(t) - \int_{t_0(t)}^t \dot{x}(s) ds - \sum_{k=1}^j \int_{t_k(t)}^{t_{k-1}(t)} \dot{x}(s) ds \quad (7.15)$$

Za účelom objasnenia vzťahov medzi signálmi $x_{K-1}(t)$ (posledný prvok) a $x(t - \tau(t))$ (okamžitý signál), predstavujeme prídavný operátor $\nabla[\dots]$ podľa [3] z $L2$ do $L2$

$$\nabla : x(t) \rightarrow \int_{t-\tau(t)}^{t_{K-1}(t)} x(s) ds = \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau(t)+\Delta(t)} x(s) ds \quad (7.16)$$

$$\Delta(t) = t_{K-1}(t) - (t - \tau(t)) = \sum_{k=0}^{K-2} \frac{(K-1-k)}{K} \delta_k(t) \leq \frac{\tau_M \mu (K-1)}{2K} \quad (7.17)$$

$L2$ norma operátora ∇ je definovaná nasledovne

$$\|\nabla(x)\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty \left(\int_{t-\tau(t)}^{t-\tau(t)+\Delta(t)} x(s) ds \right)^2 dt \quad (7.18)$$

Potom podľa Cauchy-Schwarzovej nerovnosti je operátor ∇ ohraničený takto, [3]

$$\begin{aligned} \|\nabla(x)\|_{L_2}^2 &\leq \frac{\tau_M \mu(K-1)}{2K(1-\mu)} \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{\tau_M \mu(K-1)}{2K}} \|x(s+t-\tau(t))\|^2 ds \right) dt \\ &\leq \left(\frac{\tau_M \mu(K-1)}{2K} \right)^2 \frac{1}{1-\mu} \|x\|_{L_2}^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Ohraničenie L_2 normy operátora ∇ (7.19) je použité na zostrojenie integrálneho kvadratického ohraničenia (integral quadratic constraint- IQC) na zmiernenie konzervativizmu navrhovanej metódy. IQC zohľadňuje vzťah medzi rozšíreným oneskoreným a pôvodným oneskoreným vektorom stavových veličín [3].

PI algoritmus riadenia (7.3) možno teraz prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} u(t) &= FC_n X(t) - F_p C_p \int_{t-\tau(t)}^t \dot{X}(s) ds \\ &= FC_n X(t) + (-F_p C_p) \left[\sum_{k=1}^K \int_{t-t_{k-1}(t)}^{t-t_{k-1}(t)} \dot{X}(s) ds + \int_{t-\tau(t)}^{t-t_{K-1}(t)} \dot{X}(s) ds \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Pre dané symetrické kladne definitné matice Q a R máme účelovú funkciu v tvare (5.6).

Uvážením

$$\eta^T(t) = \left[\dot{X}^T(t) \quad X^T(t) \quad \int_{t-t_0(t)}^t \dot{X}^T(s) ds \quad \dots \quad \int_{t-t_{K-1}(t)}^{t-t_{K-1}(t)} \dot{X}^T(s) ds \quad \int_{t-\tau(t)}^{t-t_{K-1}(t)} \dot{X}^T(s) ds \right]$$

a dosadením $u(t)$ zo vzťahu (7.20) do $u^T(t)Ru(t)$ dostaneme

$$J(t) = \eta^T(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & Q + C_n^T F^T R F C_n & -C_n^T F^T R F_p C_p I_p \\ * & * & I_p^T C_p^T F_p^T R F_p C_p I_p \end{bmatrix} \eta(t), \quad I_p = [I \quad I \quad \dots \quad I]_{(K+1)nxn} \quad (7.21)$$

Nasledujúca veta predstavuje náš pôvodný výsledok, ktorý bol publikovaný v prácach [25, 31]

Veta 7.1 (pôvodný výsledok, [25, 31])

Uvažujme neurčitý lineárny časovo oneskorený systém (7.1) s kritériálnou funkciou a oneskorením $\tau(t)$ (indukovaným komunikačnou sieťou) z intervalu $0 < \tau(t) \leq \tau_M$, ktorého časová derivácia je z intervalu $\|\dot{\tau}(t)\| \leq \mu \leq 1$. Predpokladajme, že existuje PI regulátor (7.3), skalár J_0 a matice $P_i > 0$, $Q_{0i} > 0$, $Q_{1i} > 0$, $R_{0i} > 0$, $R_{1i} > 0$ ($i = 1, \dots, N$), N_1 , N_2 a N_3 , pre ktoré platí nasledujúca nerovnosť

$$\begin{aligned}
W_i = & \begin{bmatrix} w_{11}^i & w_{12}^i & w_{13}^i \\ * & w_{22}^i & w_{23}^i \\ * & * & w_{33}^i \end{bmatrix} + M_{Q_0}^T \begin{bmatrix} \mu Q_{0i} & (1-\mu)Q_{0i} \\ * & -(1-\mu)Q_{0i} \end{bmatrix} M_{Q_0} + M_{R_0}^T \begin{bmatrix} \tau_M R_{0i} & 0 \\ * & -\frac{1}{\tau_M} R_{0i} \end{bmatrix} M_{R_0} \\
& + M_{R_1}^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_M}{K} R_{1i} & 0 \\ * & -\frac{K}{\tau_M} R_{1i} \end{bmatrix} M_{R_1} + \left\{ M_{Q_a}^T Q_{1i} M_{Q_a} - \left(1 - \frac{\mu}{K}\right) M_{Q_b}^T Q_{1i} M_{Q_b} \right\} \leq 0
\end{aligned} \tag{7.22}$$

kde

$$\begin{aligned}
w_{11}^i &= N_1 + N_1^T + \left[\frac{\tau_M \mu (K-1)}{2K} \right]^2 \frac{1}{1-\mu} Q_{2i} \\
w_{12}^i &= N_1 A_{ci} + N_2^T + P_i \\
w_{13}^i &= N_1 A_{delc,i} I_P + N_3^T \\
w_{22}^i &= N_2 A_{ci} + A_{ci}^T N_2^T + C_n^T F^T R F C_n + Q \\
w_{23}^i &= N_2 A_{delc,i} I_P + A_{ci}^T N_3^T - C_n^T F^T R F_p C_p I_P \\
w_{33}^i &= N_3 A_{delc,i} I_P + I_P^T A_{delc,i}^T N_3^T - \text{diag}(0_{K \times n}, Q_{2i}) + I_P^T C_p^T F_p^T R F_p C_p I_P
\end{aligned} \tag{7.23}$$

matice $M_{Q_0}, M_{R_0}, M_{R_1} \in \mathbb{R}^{2n \times (K+3)n}$ sú definované takto

$$\begin{aligned}
M_{Q_0} &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & I & I \end{bmatrix}, M_{R_0} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & I & I \end{bmatrix} \\
M_{R_1} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

a matice $M_{Q_a}, M_{Q_b} \in \mathbb{R}^{Kn \times (K+3)n}$

$$M_{Q_a} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I & -I & \dots & \dots & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{Q_b} = \begin{bmatrix} 0 & I & -I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & -I & -I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I & -I & -I & -I & \dots & -I & 0 \end{bmatrix}$$

potom neurčitý systém (7.1) s PI algoritmom riadenia (7.3) je kvadraticko asymptoticky stabilný a kritérium kvality riadenia je obmedzené nasledujúcim ohraničením

$$J \leq J_0 = \sqrt{\lambda_{MP}^2 + \lambda_{MQ_0}^2 + \lambda_{MR_0}^2 + \lambda_{MR_1}^2 + \lambda_{MQ_1}^2} * J_M \tag{7.24}$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_{MP} &= \max_{i=\{1,\dots,N\}} \left(\max(\text{Eigenvalue}(P_i)) \right), \lambda_{MQ_0} = \max_{i=\{1,\dots,N\}} \left(\max(\text{Eigenvalue}(Q_{0i})) \right) \\ \lambda_{MR_0} &= \max_{i=\{1,\dots,N\}} \left(\max(\text{Eigenvalue}(R_{0i})) \right), \lambda_{MQ_i} = \max_{i=\{1,\dots,N\}} \left(\max(\text{Eigenvalue}(Q_i)) \right) \\ \lambda_{MR_i} &= \max_{i=\{1,\dots,N\}} \left(\max(\text{Eigenvalue}(R_i)) \right) \\ J_M &= \sqrt{\|x_0\|^4 + \left(\int_{-\tau_M}^0 \|\phi(s)\|^2 ds \right)^2 + \left(\int_{-\tau_M}^0 d\theta \int_{\theta}^0 \|\dot{\phi}(s)\|^2 ds \right)^2} \\ &\quad + \sqrt{\left(K \int_{\frac{\tau_M}{K}}^0 \|\phi(s)\|^2 ds \right)^2 + \left(\int_{\frac{\tau_M}{K}}^0 d\theta \int_{\theta}^0 \|\dot{\phi}(s)\|^2 ds \right)^2} \end{aligned}$$

Veta 7.1 hovorí, že ak existuje prípustné riešenie nerovnosti (7.22) s ohľadom na $P_i > 0$, $Q_{0i} > 0$, $Q_{1i} > 0$, $Q_{2i} > 0$, $R_{0i} > 0$, $R_{1i} > 0$ ($i = \{1, \dots, N\}$), N_1 , N_2 , N_3 , potom existuje taký PI regulátor $F = [K_p \quad K_I]$, ktorý garantuje robustnú stabilitu a riadenie so zaručenou hodnotou kritéria kvality. Využitie Vety 7.1 na návrh riadenia ilustrujeme v dizertačnej práci na dvoch príkladoch. V prvom príklade je návrh vykonaný pre 1000 nestabilných náhodne vygenerovaných systémov. V druhom príklade je návrh vykonaný pre jeden konkrétny teoretický príklad. Výsledky tejto časti boli publikované v prácach [25, 31].

8 ZÁVER

Cieľom práce bolo uviesť riešenie vybraných problémov robustného riadenia v časovej oblasti a charakterizovať vybrané výsledky so zameraním na využitie prístupu využívajúceho LMI a BMI formuláciu na riešenie úlohy na základe jednotnej metodiky založenej na využití Ljapunovovej funkcie. Uvedli sme základné formulácie LMI a BMI optimalizačných úloh, ktoré sú spolu s príslušnými algoritmiami nápomocné pri analýze stability ako aj pri syntéze robustných regulačných obvodov pre reálne procesy.

Hlavnou úlohou dizertačnej práce bolo priniesť nové výsledky v oblasti robustného riadenia dynamických systémov v časovej oblasti s využitím maticových nerovností, konkrétne ide o:

- ďalšie výsledky pre robustné umiestnenie pólov pri návrhu riadenia v časovej oblasti, najmä pre časovo-diskrétné systémy, kde je čiastkovým cieľom nájsť vhodnú konvexnú aproximáciu nekonvexnej oblasti pre stanovené tlmenie,
- úlohy s ohraničením akčného zásahu, cieľom je využiť formuláciu ohraničenia akčného zásahu pomocou lineárnych maticových nerovnic,
- využitie výsledkov z návrhu robustného riadenia pre decentralizované riadenie,
- riadenie systémov s dopravným oneskorením.

K hlavným výsledkom práce patrí využitie LMI prístupu na opis oblastí stability v spojitej s -oblasti resp. v diskkrétnej z -oblasti. Sú bližšie špecifikované aj špeciálne druhy takýchto oblastí vhodných pre úlohy umiestnenia pólov. Za pomoci týchto oblastí možno definovať aj ich prienik, čím sa opäť vytvorí LMI oblasť, ktorá však už má špecifický tvar.

Treba zdôrazniť, že zatiaľ čo v spojitej oblasti všetky spomenuté oblasti stability predstavujú konvexné množiny, ich transformáciou do diskretnej oblasti vzniknú aj nekonvexné oblasti. Originálne výsledky práce sa týkajú práve aproximácie týchto nekonvexných oblastí konvexnou množinou bodov, aby bolo možné využiť prednosti LMI prístupu.

V oblasti decentralizovaného riadenia sme vypracovali a overili procedúru návrhu robustného decentralizovaného regulátora pre ekvivalentné podsystémy v časovej oblasti, vďaka ktorej je možné vykonať návrh regulátorov pre každý podsystém samostatne so zohľadnením robustnej stability a kritéria kvality riadenia celého zložitého systému.

V prípade systémov s dopravným oneskorením sme uviedli procedúru návrhu robustného regulátora s využitím diskretizovanej formy Ljapunov-Krasovského funkcionálu, vďaka ktorej možno celý interval časového oneskorenia rozdeliť na niekoľko častí rovnakej dĺžky.

V práci bola taktiež úspešne aplikovaná problematika obmedzenia akčného zásahu pomocou elipsoidálnych invariantných množín, ktoré sme overili takmer pre všetky prípady návrhu robustného riadenia.

Vo všetkých spomenutých oblastiach bolo vykonané overenie jednotlivých teórií aj na niekoľkých numerických príkladoch, ktoré sú uvedené v jednotlivých kapitolách.

Na základe výsledkov uvedených v kapitolách 4, 5, 6 a 7 možno povedať, že všetky ciele dizertačnej práce z kapitoly 3 boli splnené.

LITERATÚRA

- [1] Ackerman, J., et al.: *Robust Control Systems with Uncertain Physical parameters*. Springer-Verlag, 1997.
- [2] Ariba, Y., Gouaisbaut, F.: Construction of Lyapunov-Krasovskii functional for time-varying delay systems. In: *47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC '08)*, Cancun, Mexico, December 2008, pp. 3995-4000.
- [3] Ariba, Y., Gouaisbaut, F.: Delay-dependent Stability Analysis of Linear Systems with Time-varying Delay, In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 2007, pp. 2053-2058.
- [4] Ayad, H., Mesquine, F., Ait Rami, M.: Robust control for uncertain linear systems with State and Control Constraints*. In: *The International Federation of Automatic Control, Proceedings of the 17th World Confress*, Seoul, Korea, July 6-11, 2008, pp. 1153-1158.
- [5] Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H.: *Robust Control. The parametric Approach*. Prentice Hall, 1995.
- [6] de Oliveira, M. C., Bernussou, J., Geromel, J. C.: A new discrete-time robust stability condition. In: *Systems and Control Letters*, Vol. 37, 1999, pp. 261-265.
- [7] de Oliveira, M. C., Geromel, J. C., Hsu, L.: LMI Characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. In: *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 296, No. 1-3, July 1999, pp. 27-38.
- [8] Fiedler, M.: *Special Matrices and Their Use in Numerical Mathematics (Speciální matice a jejich použití v numerické matematice)*, SNTL, Praha, 1981.
- [9] Geromel, J. C., de Oliveira, M. C., Hsu, L.: LMI Characterization of structural and robust stability. In: *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 285, No. 1-3, December 1998, pp. 69-80.

- [10] Gu, K., Niculescu, S. I.: *Advanced Topics in Control Systems Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, LNCIS Vol. 328/2006, 2006, pp. 139-170.
- [11] Ivan, J.: *Matematika 2*. ALFA Bratislava 1989, ISBN 80-05-00114-2, 1989.
- [12] Karas, A., Rohál'-Il'kiv, B., Belavý C.: *Praktické aspekty prediktívneho riadenia*. STU v Bratislave, ISBN 978-80-89316-06-9, Slovenská e-akadémia, 2007.
- [13] Kozáková, A., Veselý, V.: Independent Design of Decentralized Controllers for Specified Closed-Loop Performance. In: *European Control Conference ECC'03*, Cambridge, UK, September 1 – 4, 2003.
- [14] Kozák, Š.: *Lineárne systémy. Materiály k prednáškam*, Slovenská Technická Univerzita v Bratislave, 2005.
- [15] Lancaster, P. and Tismenetsky, M.: *The Theory of Matrices, Second Edition with Applications*, Academic Press, 1985.
- [16] Millerioux, G., Daafouz, J.: Polytopic Observer for Global Synchronization of Systems with Output Measurable Nonlinearities. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 13, No. 3, 2003, pp. 703-712.
- [17] Oya, H., Hagino, K., Matsuoka, M.: Observer-Based Guaranteed Cost Control Scheme for Polytopic Uncertain Systems with State Delays. In: *The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, November 2-6, Busan, Korea, 2004, pp 684-689.
- [18] Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O., Bernussou, J.: A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. In: *Systems and Control Letters*, Vol. 40, No. 1, 2000, pp. 21-30(10).
- [19] Qian, L., Vittal, V., Elia, N.: LMI Pole Placement Based Robust Supplementary Damping Controller (SDC) for A Thyristor Controlled Series Capacitor (TCSC) Device. In: *Proceeding of the 2005 IEEE Power Engineering Society General Meeting*, San Francisco, Vol. 2, 2005, pp. 1381-1386.
- [20] Rosinová, D.: *Robustné riadenie diskretných dynamických systémov*. Habilitačná práca. Slovenská Technická Univerzita v Bratislave, Fakulta Elektrotechniky a Informatiky, 2005.
- [21] Rosinová, D., Veselý, V.: Robust PID Decentralized Controller Design Using LMI, In: *1st IFAC Workshop on Applications of Large Scale Industrial Systems*, Helsinki, Finland, 30-31 August, 2006.
- [22] Veselý, V., Harsányi, L.: *Robustné riadenie dynamických systémov*. Slovenská Technická Univerzita v Bratislave, 126, 2008, 978-80-227-2801-0.
- [23] Veselý, V., Rosinová, D., Foltin, M.: Robust Model Predictive Control Design with Input Constraints. In: *ISA Transactions*, Vol. 49, 2010, pp. 114-120, ISSN 0019-0578.
- [24] Zhang, W., Branicky, Philips, S. M.: Stability of networked control systems. In: *IEEE Control System Magazine*, Vol. 21, No. 1, 2001, pp. 84-99.

VLASTNÉ PUBLIKOVANÉ PRÁCE

Vedecké práce v zahraničných karentovaných časopisoch

- [25] Nguyen, Q. T., Holič, I., Veselý, V.: Robust Guaranteed Cost Controller Design for Networked Control Systems: Discretized Approach. In: *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, ISSN 1349-4198, Vol. 7, No. 6, 2011, pp. 3533-3543.

Vedecké práce v domácich nekarentovaných časopisoch

- [26] Nguyen, Q. T., Holič, I.: Robust Controller Design for the 3DCrane Process. In: *AT&P Journal Plus*, ISSN 1336-5010, No. 1: „Systémy automatického riadenia“, pp. 95-99, 2010.

Príspevky publikované na zahraničných vedeckých konferenciách

- [27] Holič, I., Dúbravská, M., Paulusová, J.: Design of Continuous Compensators with Specified Structure. In: *Process Control 2010 : 9th International Conference*, Kouty nad Desnou, 7.-10. 6. 2010, Pardubice : University of Pardubice, 2010, ISBN 978-80-7399-951-3.
- [28] Holič, I., Rosinová, D.: Robust Stabilization of Polytopic Systems: Pole Placement Based on LMI Regions. In: *Process Control 2010 : 9th International Conference*, Kouty nad Desnou, 7.-10. 6. 2010, Pardubice : University of Pardubice, 2010, ISBN 978-80-7399-951-3.
- [29] Holič, I., Veselý, V.: Robust PID Controller Design for Coupled-Tank Process. In: *Process Control 2011 : Proceedings of the 18th International Conference*, Tatranská Lomnica, Slovakia, 14.-17.6. 2011, Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2011, ISBN 978-80-227-3517-9, pp. 506-512.
- [30] Holič, I., Veselý, V.: Robust PID Controller Design for Coupled-Tank Process Using Labreg Software. In: *9th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, June 19-21, 2012, Nizhny Novogorod, Russia, New York : IFAC, 2012, ISBN 978-3-902823-01-4, pp. 442-447.
- [31] Nguyen, Q. T., Holič, I., Veselý, V.: Robust Guaranteed Cost Controller Design for Networked Control Systems: Discretized Approach. In: *Process Control 2010 : 9th International Conference*, Kouty nad Desnou, 7.-10. 6. 2010, Pardubice : University of Pardubice, 2010, ISBN 978-80-7399-951-3.
- [32] Osuský, J., Holič, I.: Robust Decentralized Controller Design with Specified Gain Margin. In: *PEIT '011. New Paradigms in Electronics & Information Technologies : 1st International Conference*, Alexandria, Egypt, October 9-12, 2011. Cairo : ERI, 2011.
- [33]* Holič, I., Ilka, A.: Robust State Feedback Controller Design for DC-Motor System. In: *10th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, August 28-30, 2013, Sheffield, United Kingdom, The University of Sheffield.
- [34] Holič, I., Rosinová, D., Veselý, V.: Decentralized Control of Boiler-Turbine System. In: *Power Engineering 2012. Control of Power Systems 2012 : 10th International Scientific Conference CPS 2012*, Tatranské Matliare, Slovakia, May 15-17, 2012, Bratislava : Slovak University of Technology in Bratislava, 2012, ISBN 978-80-89402-47-2, pp. 165-166.
- [35]* Holič, I., Rosinová, D., Veselý, V.: Robust Decentralized PI Controller Design Based on Subsystem Pole Placement. In: *13th IFAC Symposium on Large Scale Complex Systems: Theory and Applications (IFAC LSS 2013)*, July 7-10, 2013, Shanghai, China.
- [36]* Holič, I., Rosinová, D.: Robust PI Controller Design for Coupled-Tank Process: LMI Approach. In: *Process Control 2013 : Proceedings of the 19th International Conference*, Štrbské Pleso, Vysoké Tatry, Slovakia, June 18-21, 2013.

* články prijaté na konferencie

- [37] Holič, I., Nguyen, Q. T.: Robust Stabilization of Polytopic Systems: Pole Placement Based on LMI Regions with Input Constraints. In: *Kybernetika a informatika 2012 : zborník príspevkov; Medzinárodná konferencia SSKI a FEI STU*, Skalka pri Kremnici, 31. január - 4. február 2012, Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2012, ISBN 978-80-227-3642-8.
- [38] Nguyen, Q. T., Holič, I.: Design of Robust PI Controller with Input Constraints. In: *Kybernetika a informatika 2012 : zborník príspevkov; Medzinárodná konferencia SSKI a FEI STU*, Skalka pri Kremnici, 31. január - 4. február 2012, Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2012, ISBN 978-80-227-3642-8.

Príspevky publikované na domácich vedeckých konferenciách

- [39] Holič, I.: Robust Controller Design for Hydraulic MIMO System. In: *ELITECH'11 : 13th Conference of Doctoral Students Faculty of Electrical Engineering and Information Technology*, Bratislava, Slovak Republic, 17 May, 2011, Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2011, ISBN 978-80-227-3500-1.
- [40]** Holič, I.: Robust Pole Placement Based on LMI Regions with Input Constraints. In: *ELITECH'12 : 14th Conference of Doctoral Students*, Bratislava, Slovak Republic, 22 May 2012, Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2012, ISBN 978-80-227-3705-0.
- [41] Holič, I., Rosinová, D.: Robust Pole Placement Design: An LMI Approach. In: *ELITECH'10 : 12th Conference of Doctoral Students*, Bratislava, Slovak Republic, 26.5.2010, Bratislava : STU v Bratislave, 2010, ISBN 978-80-227-3303-8.

** práca ocenená prvou cenou v sekcii Kybernetika