

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**

**Fakulta elektrotechniky a informatiky**

**Ing. Pavol Bisták**

**Autoreferát dizertačnej práce**

**RIADENIE TROJITÉHO INTEGRÁTORA  
S REŠPEKTOVANÍM OBMEDZENÍ**

na získanie akademického titulu

**philosophiae doctor**

v doktorandskom študijnom programe

**5.2.14 Automatizácia a riadenie**

**Bratislava 2013**

Dizertačná práca bola vypracovaná v externej forme doktorandského štúdia na Ústave riadenia a priemyselnej informatiky Fakulty elektrotechniky a informatiky Slovenskej technickej univerzity v Bratislave.

Predkladateľ: **Ing. Pavol Bisták**  
Ústav riadenia a priemyselnej informatiky FEI STU  
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Školiteľ: **prof. Ing. Mikuláš Huba, PhD.**  
Ústav riadenia a priemyselnej informatiky FEI STU  
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Oponenti: **prof. Ing. Roman Prokop, CSc.**  
Fakulta aplikovanej informatiky  
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

**prof. Ing. Dušan Mudrončík, PhD.**  
Materiálovotechnologická fakulta  
Slovenská technická univerzita v Bratislave

Autoreferát bol rozoslaný dňa: .....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa ..... o ..... h

v.....

prof. RNDr. Gabriel Juhás, PhD.  
dekan FEI STU

## Riadenie trojitého integrátora s rešpektovaním obmedzení

### Abstrakt

Cieľom práce je návrh časovo-suboptimálneho riadenia pre lineárne systémy s obmedzenou akčnou veličinou. Časovo-suboptimálny regulátor pre trojnásobný integrátor je získaný aplikáciou nelineárnej dekompozície dynamiky. Analytické riešenie však pre tento prípad neexistuje, a preto je zavedené zjednodušenie časovo-suboptimálneho riadenia. To umožnilo odvodiť exaktné riadenie, ktorého výpočet je rádovo rýchlejší ako pôvodný časovo-suboptimálny algoritmus. Zjednodušený časovo-suboptimálny algoritmus bol porovnaný s inými štandardnými metódami a aplikovaný na nelineárny hydraulický systém s tromi nádržami, čím bola preukázaná realizovateľnosť navrhnutého algoritmu. Ciele práce tak boli splnené.

**Kľúčové slová:** obmedzenie akčnej veličiny, trojnásobný integrátor, časovo-suboptimálny regulátor, nelineárna dekompozícia dynamiky, geometrická interpretácia riadenia so zadávaním pólov.

## Control of Triple Integrator with Input Saturation

### Abstract

The thesis is focused on the design of a time-suboptimal control for linear systems with input saturation. The triple integrator time-suboptimal controller is derived by the application of the nonlinear dynamics decomposition. An analytical solution for this case does not exist and so a simplified time-suboptimal control is introduced. This enables to derive the exact control that calculation is considerably faster than the original time-suboptimal algorithm. The simplified time-suboptimal algorithm has been compared with other standard methods and applied to a real nonlinear hydraulic system with three tanks that documented the feasibility of the designed algorithm. So the aims of the thesis have been fulfilled.

**Keywords:** input saturation, triple integrator, time-suboptimal control, nonlinear dynamics decomposition, geometrical interpretation of the pole assignment control.

# Obsah

<b>ZOZNAM POUŽITÝCH ZNAČIEK A SYMBOLOV .....</b>	<b>5</b>
<b>1 ÚVOD .....</b>	<b>5</b>
<b>2 DOSIAHNUTÝ STAV .....</b>	<b>6</b>
<b>3 FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE DIZERTAČNEJ PRÁCE .....</b>	<b>8</b>
3.1 CIELE DIZERTAČNEJ PRÁCE .....	9
<b>4 NELINEÁRNA DEKOMPOZÍCIA DYNAMIKY .....</b>	<b>10</b>
<b>5 SYNTÉZA REGULÁTOROV S OBMEDZENIAMÍ PRE SYSTÉMY 3. RÁDU .....</b>	<b>11</b>
5.1 NELINEÁRNE ČASOVO-SUBOPTIMÁLNE RIADENIE ZALOŽENÉ NA DEKOMPOZÍCII DYNAMIKY .....	11
5.2 REALIZÁCIA ALGORITMU NELINEÁRNEHO ČASOVO-SUBOPTIMÁLNEHO RIADENIA ZALOŽENÉHO NA DEKOMPOZÍCII DYNAMIKY .....	16
5.3 VERIFIKÁCIA ALGORITMU RIADENIA SIMULÁCIOU Z RÔZNYCH POČIATOČNÝCH STAVOV .....	17
5.4 ZJEDNODUŠENIE NÁVRHU NELINEÁRNEHO ČASOVO-SUBOPTIMÁLNEHO RIADENIA .....	19
5.4.1 Riadenie pre segment $QQ$ .....	21
5.4.2 Riadenie pre segment $TQ$ .....	22
5.4.3 Riadenie pre segment $TT$ a $QT$ .....	23
5.5 ZJEDNODUŠENÝ ALGORITMUS RIADENIA .....	24
5.6 OVERENIE ZJEDNODUŠENÉHO ALGORITMU RIADENIA SIMULÁCIOU .....	25
5.7 POROVNANIE ALGORITMOV RIADENIA .....	25
5.7.1 Porovnanie navrhnutých algoritmov navzájom .....	25
5.7.2 Porovnanie s prediktívnym regulátorom .....	27
<b>6 APLIKÁCIA NA RIADENIE HYDRAULICKÉHO SYSTÉMU .....</b>	<b>28</b>
6.1 OPIS HYDRAULICKÉHO SYSTÉMU S TROMI NÁDRŽAMI .....	28
6.2 ČASOVO-SUBOPTIMÁLNY REGULÁTOR APLIKOVANÝ NA REÁLNY HYDRAULICKÝ SYSTÉM .....	29
<b>7 ZHODNOTENIE A DISKUSIA .....</b>	<b>32</b>
7.1 VÝSLEDKY PRÁCE .....	32
7.2 PRÍNOSY PRÁCE .....	34
7.3 PERSPEKTÍVY VÝVOJA .....	34
<b>8 ZÁVER .....</b>	<b>35</b>
<b>ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY .....</b>	<b>36</b>
<b>PUBLIKOVANÉ PRÁCE AUTORA .....</b>	<b>38</b>

## Zoznam použitých značiek a symbolov

<b>A</b>	- matica systému
<b>b</b>	- vstupný vektor
<b>x</b>	- stavový vektor
$x, y, z$	- súradnice fázového priestoru
$u$	- akčná veličina
$U_1, U_2$	- hranice obmedzení akčného zásahu
$sat()$	- funkcia obmedzenia
$\alpha_i$	- vlastné čísla, póly uzavretého obvodu
$v_i$	- vlastné vektory
<b>I</b>	- jednotková matica
<b>r</b>	- spätnoväzobný riadiaci vektor
$\rho_v$	- orientovaná vzdialenosť meraná v smere vektora <b>v</b>
<i>RBC</i>	- referenčná brzdná krivka (Reference Braking Curve)
<i>RBS</i>	- referenčná brzdná plocha (Reference Braking Surface)
<i>PB</i>	- pásmo proporcionálneho riadenia (Proportional Band)

## 1 Úvod

Zmena patrí medzi základné charakteristiky živých aj neživých systémov. Preto dynamické systémy už odpradáva priťahujú pozornosť ľudstva. Spoločnosť sa snažila dostať ich správanie pod kontrolu už v dávnej minulosti. O systematickom riadení dynamických systémov môžeme hovoriť už vyše storočia. Za ten čas teória riadenia dynamických systémov zaznamenala nebývalý rozmach. Podrobne boli rozpracované metódy v oblasti lineárnych a nelineárnych dynamických systémov. Rozšírené sú najmä metódy lineárneho riadenia, ktoré vďaka svojmu konzervatívnemu prístupu spoľahlivo fungujú vo väčšine praktických aplikácií. Existujú však aplikácie, kde konzervatívny lineárny prístup k návrhu regulátorov nepostačuje. Vtedy sme nútení opustiť lineárnu oblasť a zaoberať sa problémami nelineárneho riadenia, ktoré môže viesť až na ohraničenia, kde sa v plnej šírke prejavuje nelineárne správanie dynamických systémov. Požiadavky takéhoto nekonzervatívneho návrhu môžu pritom vyplývať priamo z technológie alebo jednoducho z procesu optimalizácie prechodových dejov.

V tejto práci sa budeme snažiť prepojiť princípy známe z oblasti lineárneho riadenia s prípadmi, kedy sa systém dostáva na obmedzenia a je potrebné zobrať do úvahy jeho celkové nelineárne správanie. Odrazí sa to aj v použitej terminológii, keď napr. pojem „pól“ známy z lineárnych systémov budeme používať aj v návrhu nelineárneho riadenia. Výsledkom našich snáh potom bude nelineárny regulátor so zadávaním pólov, ktorého dominantná nelinearita bude spočívať v obmedzení akčného zásahu. Z iného pohľadu sa na tento typ regulátora možno pozeráť ako na časovo-optimálny regulátor rešpektujúci obmedzenia akčného signálu, ktorý súčasne spĺňa dodatočnú podmienku rešpektujúcu

úlohu pólov uzavretého riadiaceho obvodu. Vtedy môžeme používať menej kontroverzné označenie časovo-suboptimálny regulátor.

Výsledný regulátor bude navrhnutý v časovej oblasti. S ohľadom na jednoduchosť sa obmedzíme na jeho spojitú verziu a riadený systém bude reprezentovaný modelom trojitého integrátora. Návrh bude realizovaný v prostredí systému počítačovej algebry Maple. Získané riešenie bude potvrdené simuláciami v prostredí Maple a Matlab/Simulink a zároveň bude porovnané s inými štandardnými regulátormi. Pre zdokumentovanie necitlivosti voči parametrom modelu bude navrhnutý regulátor aplikovaný na reálny hydraulický systém.

## 2 Dosiahnutý stav

Riadenie systémov s obmedzeniami sa dostalo do popredia takmer súčasne s aplikáciou teórie automatického riadenia v praxi. Ukázalo sa, že reálne systémy prinášajú so sebou neodmysliteľné obmedzenia, ktoré vyplývajú z ich fyzikálnej podstaty, sú dôsledkom bezpečnosti alebo ich technickej konštrukcie. Ak si v štruktúre riadiaceho obvodu predstavíme akčné členy, tieto vždy disponujú len obmedzeným výkonom a generujú signály, ktoré sú ohraničené, čo sa týka amplitúdy alebo aj rýchlosti zmien. Podobné obmedzenia sa uplatňujú aj na výstupné signály riadiaceho obvodu a na jeho stavy. Je pravdou, že pri vhodnom návrhu riadiacich obvodov sa dá vplyv obmedzení čiastočne eliminovať napr. tým, že zabezpečíme, aby v normálnom režime činnosti k obmedzeniam nedochádzalo. To však nie je možné vždy a všade, napr. pri nestabilných systémoch, optimálnych systémoch alebo pri systémoch, kde obmedzenia priamo vyplývajú z konštrukcie. Ďalším faktorom je, že návrh lineárneho riadenia, ktoré nepripúšťa ohraničenia, nemá dostatočnú dynamiku, čo znižuje kvalitu regulácie, lebo prechodové deje bývajú pretlmené. V tejto práci sa zameriame hlavne na systémy s obmedzeniami vstupov (t.j. akčnej resp. riadiacej veličiny – angl. input saturation systems). Budeme sa zaoberať najmä obmedzením amplitúdy vstupnej veličiny, aj keď voľbou parametrov navrhnutého riadenia vieme ovplyvňovať aj rýchlosť jej zmien.

Existuje viacero známych metód, ktoré riešia syntézu riadenia systémov s obmedzeniami. Už v polovici minulého storočia zaznamenalo veľký rozmach optimálne riadenie, ktoré dokázalo pri ohraničujúcich podmienkach priviesť systém do želaného stavu za súčasného plnenia zvoleného kritéria. Pri jeho návrhu sa využívali najmä metóda dynamického programovania založená na Bellmanovom princípe optimality a Pontrjaginov princíp maxima, ktorý umožnil analyticky vyjadriť vzťahy pre optimálne riadenie. V prípade spätnoväzbového časovo optimálneho riadenia boli dôležité body prepínania medzných hodnôt akčnej veličiny reprezentované prepínacími plochami. Iný spôsob, ako dospieť k rovnicam prepínacích plôch, ukázal Pavlov (1966), ktorý vychádzal z trajektórií vo fázovom priestore. Prepínacie plochy časovo optimálneho riadenia môžu byť získané aj z časového riešenia vo fázovom priestore, čo vedie na systém algebrických rovníc (Walther a kol., 2001). Je nutné pripomenúť, že analytické riešenie optimálneho riadenia nie je podľa vyššie spomenutých metód možné odvodiť vo všeobecnom prípade. Pre tento účel vieme tieto metódy aplikovať len na systémy nižšieho (druhého) rádu. Pre systémy vyššieho rádu využívame numerické riešenia (Bisták, 2010), ktoré môžu byť vhodné najmä pre dopredné riadenie. V prípade spätnoväzobného riadenia býva limitujúcim faktorom čas výpočtu numerického riešenia, ktorý určuje, pre aké rýchle systémy možno tieto algoritmy nasadiť.

Nedostatkom časovo optimálneho riadenia je jeho nespojitý charakter (angl. „bang-bang“ alebo „on-off“ control), kedy dochádza k skokovému prepínaniu medzi dvoma krajnými hodnotami. Nevýhodou je aj citlivosť takéhoto riadenia na rôzne parazitné vplyvy, ako sú napr. zanedbaná nemodelovaná dynamika, zmena parametrov systému alebo nízka odolnosť voči šumom merania. Problémom býva ustálený stav, kedy riadenie generuje s vysokou frekvenciou pravouhlé riadiace impulzy, ktoré sa potom stávajú zdrojom vyšších harmonických zložiek a nepriaznivo ovplyvňujú výstup cez rôzne parazitné členy riadiaceho obvodu. V reálnych podmienkach je potom takéto riadenie prakticky nepoužiteľné.

Uvedené nedostatky optimálneho riadenia spôsobili, že sa v 60-tych rokoch minulého storočia začal v teórii riadenia presadzovať prúd reprezentovaný riadením so zadávaním pólov (angl. pole assignment control). Toto riadenie, na rozdiel od optimálneho, vykazuje hladké priebehy riadiacej veličiny a statické ustálené stavy. Riadenie so zadávaním pólov tiež nie je až tak citlivé na zmenu parametrov systému a je ho možné analyticky odvodiť i pre systémy vyšších rádov. Hlavným nedostatkom tohto typu riadenia je, že nerešpektuje obmedzenia. Preto je potrebné voliť parametre tohto riadenia (póly) tak, aby nedochádzalo k obmedzeniam, čo je v niektorých prípadoch nemožné, alebo to aspoň nepriaznivo ovplyvňuje výslednú kvalitu prechodových dejov, ktoré sú výrazne pomalšie. V iných prípadoch (napr. nestabilné systémy) prechodové deje nie je možné spomaľovať, a tak nutne dochádza k obmedzeniam. Stabilitu a kvalitu riadenia je potom potrebné preukázať inými metódami.

Ak by obmedzenia neboli v návrhu riadenia zohľadnené, môže dôjsť k zhoršeniu kvality riadenia vo forme prerégulovania (typické pre tzv. wind up) alebo v horšom prípade aj k narušeniu stability regulačného procesu. Preto vznikla snaha doplniť existujúce metódy riadenia o nové štruktúry, ktoré potlačia vplyv obmedzení a zabezpečia stabilitu a kvalitu riadenia.

Takéto štruktúry ponúka metóda anti-windup, ktorá má doteraz najväčšie využitie v praxi. Anti-windup predstavuje empirickú metódu, ktorá sa dokáže vysporiadať s nelineárnym efektom spôsobeným obmedzeniami riadiacej veličiny tak, že dodatočne implementuje do riadiaceho obvodu štruktúru, ktorá udrží výstup z regulátora na ohraničeniach. Regulátor pôvodne navrhnutý pre systém bez obmedzenia je tak v druhom kroku doplnený o štruktúru anti-windup. To v prípade, že systém nie je na obmedzení, zaručuje jeho kvalitu a na druhej strane zabezpečuje rešpektovanie obmedzenia a potlačenie jeho neželaných vplyvov v prípade, keď k nemu dochádza. Práve dvojkrovový návrh, využitie konvenčných metód riadenia a možnosť následne pridať anti-windup štruktúru, sú hlavnými dôvodmi, prečo je táto metóda často využívaná v inžinierskej praxi.

Okrem anti-windupových štruktúr, ktoré sa s obmedzením vysporiadávajú dodatočne, Huba (2003c) prezentuje druhú skupinu metód, ktoré zohľadňujú obmedzenia akčnej veličiny dopredu („a priori“). Z nich časť metód je zameraná na to, aby vôbec zamedzila možnosť vzniku obmedzenia. Vtedy sa riadiaci systém udržuje v lineárnom režime činnosti. Metódy využívajú pozitívnu invariantnosť množín, ktorou je zabezpečený lineárny charakter správania sa riadiaceho obvodu pre všetky prípustné začiatkové stavy. Pozitívne invariantné množiny určujú lineárnu lokálnu oblasť stability (Hennet a Béziat, 1991; Blanchini, 1999). Spoločným menovateľom tejto skupiny metód je snaha vyhnúť sa obmedzeniu, čo má za následok, že prechodové deje sú väčšinou pretlmené, pretože sa nevyužíva nelineárna dynamika.

Iná skupina metód, ktoré zohľadňujú obmedzenia akčnej veličiny dopredu, využíva nelineárnu dynamiku, pretože pripúšťa obmedzenia. Do tejto skupiny patria už vyššie spomínané časovo-optimálne systémy, ale aj ich rôzne modifikácie, ktoré sa vyznačujú premenlivou štruktúrou, keď kombinujú dvojpolohové riadenie s lineárnym riadením (Smith, 1958; Kiendl a Schneider, 1972). Zaujímavé výsledky boli dosiahnuté v globálnej, semi-globálnej a lokálnej stabilizácii systémov s obmedzeniami. Ďalej do tejto skupiny patria veľmi populárne metódy na riešenie systémov s obmedzeniami, ktorých ciele sú formulované ako optimalizačné problémy. Tieto sa potom riešia pomocou lineárnych maticových nerovnic LMI. Dané optimalizačné problémy sú konvexné a môžu byť exaktne transformované do LMI. Využíva sa metodika prediktívneho riadenia (Bemporad a kol., 2002 a Borelli, 2003).

Nevýhodou vyššie citovaných metód, ktoré sa dopredu vysporiadávajú s obmedzeniami, je však výpočtová náročnosť. V tejto práci navrhujeme algoritmy, ktoré budú rádovo rýchlejšie, hoci ich použitie bude obmedzené pre špecifickú skupinu systémov.

Na našom pracovisku sa paralelne s vyššie uvedenými metódami rozvíjali riešenia, ktoré vychádzajú z vyjadrenia dosiahnuteľných množín stavov pri aplikácii obmedzeného riadenia s reverzným časom (Huba, 1994; Huba, 1998; Huba a Bisták, 1999; Bisták a Huba, 2001; Huba, 2003c; Huba a Bisták, 2005; Huba, 2005; Bisták a kol., 2006a; Bisták a kol., 2006b; Ľapák a kol., 2006; Žilka a kol., 2008; Bisták, 2010; Žilka a Huba, 2011; Huba a Bisták, 2011; Bisták, 2011b; Bisták, 2011c; Bisták 2012 ). Po zjednodušení sú tieto riešenia tiež vhodné pre rýchle aplikácie a ich parametre je možné nastavovať na základe jednoduchých postupov, ktoré možno chápať ako zovšeobecnenie známych metód Zieglera a Nicholasa, resp. Aströma a Häglunda. V tejto práci sa zameriavame na rozšírenie týchto riešení pre systémy vyšších rádov, pričom dominantnou metódou návrhu bude nelineárna dekompozícia dynamiky.

### 3 Formulácia problému a ciele dizertačnej práce

Uvažujme lineárny systém  $n$ -tého rádu, ktorý možno v stavovom priestore vyjadriť v normálnej forme riaditeľnosti vektorovou diferenciálnou rovnicou

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_r, \\ y &= \mathbf{c}^t \mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.1}$$

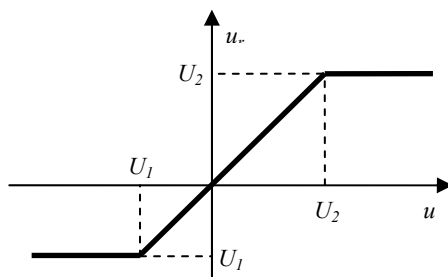
kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  je stavový vektor, matica  $\mathbf{A}$  dimenzie  $n \times n$  je maticou systému a  $n$ -rozmerný vektor  $\mathbf{b}$  je vstupný vektor nazývaný tiež vektor riadenia

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Dominantnou nelinearitou v riadiacom obvode bude obmedzenie akčnej veličiny  $u_r$

$$u_r = \text{sat}\{u\} = \begin{cases} U_2; & u > U_2 > 0 \\ u; & U_1 \leq u \leq U_2 \\ U_1; & u < U_1 < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$





Obr.3.1 Obmedzenie akčnej veličiny (saturácia)

Hľadáme takú spojité akčnú veličinu  $u_r$  spĺňajúcu obmedzenia (3.3), ktorá privedie systém zo začiatočného stavu  $\mathbf{x}_0$  do žiadaného stavu  $\mathbf{x}_w$  za čo najkratší čas, pričom však norma  $L_i$  spĺňa

$$\frac{dL_i}{dt} \geq \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}^-, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Znamienko nerovnosti sa uplatňuje iba v prípade, že  $u_r$  je rovná jednej z medzných hodnôt obmedzenia (3.3), pretože vplyvom tohto obmedzenia nie je možné zabezpečiť takú zmenu normy  $L_i$ , ktorú by si vyžiadala rovnosť. V prípade, že  $u_r$  je z vnútra rozsahu daného obmedzením (3.3), stačí v nerovnici (3.4) uvažovať rovnosť, z čoho potom pre normu  $L_i$  vyplýva

$$\frac{dL_i}{dt} = \alpha_i L_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}^-, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Diferenciálna rovnica 1. rádu (3.5) vyjadruje znižovanie normy  $L_i$  – inými slovami približovanie sa zastupujúceho bodu  $\mathbf{x}(t)$  k cieľu  $G$ . Toto je charakterizované koeficientami  $\alpha_i$ , ktoré v čisto lineárnom prípade predstavujú póly uzavretého riadiaceho obvodu. K nelineárnemu prípadu dochádza v dôsledku obmedzenia (3.3) v situáciách, keď podmienka približovania sa s dynamikou prvého rádu (3.5) nemôže byť splnená vo všetkých bodoch  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ . V takom prípade bude akčný zásah potrebný na dosiahnutie dynamiky (3.5) prekračovať prípustné obmedzenia a hľadanej akčnej veličine  $u_r$  tu môže vyhovovať najvyššia jedna z jej limitných hodnôt. Bude však existovať aj množina bodov, v ktorých bude akčná veličina  $u_r$  nadobúdať hodnoty z vnútra intervalu  $\langle U_1, U_2 \rangle$  daného obmedzeniami. Túto množinu bodov budeme príliehavo nazývať pásmo proporcionálneho riadenia a označovať *PB* (Proportional Band).

### 3.1 Ciele dizertačnej práce

Všeobecným cieľom práce bude návrh riadiacich algoritmov pre systémy s obmedzenou akčnou veličinou vychádzajúci z geometrickej interpretácie lineárneho riadenia so zadávaním pólov. K špecifickým cieľom práce potom patrí:

- rozpracovanie teórie nelineárnej dekompozície dynamiky,
- návrh časovo-suboptimálneho regulátora rešpektujúceho obmedzenia akčnej veličiny s využitím metódy nelineárnej dekompozície dynamiky,
- zjednodušenie návrhu časovo-suboptimálneho regulátora rešpektujúceho obmedzenia akčnej veličiny pomocou geometrickej interpretácie znižovania

vzdialenosti meranej vo vhodne zvolenom smere pre systém trojnásobného integrátora,

- porovnanie alternatívnych metód a ich aplikácia pre systémy reálneho času.

## 4 Nelineárna dekompozícia dynamiky

Pre vysvetlenie pojmu nelineárnej dekompozície dynamiky vyjdeme z princípov časovo optimálneho riadenia a riadenia so zadávaním pólov. Na základe geometrickej interpretácie týchto typov riadenia ukážeme, ako možno kombinovať ich vlastnosti, čo vyústi v zavedenie nelineárnej dekompozície dynamiky.

Z časovo optimálneho riadenia (tzv. Feľdbaumova veta publikovaná napr. v práci Föllingera, 1994) vieme, že vo všeobecnosti prechodový dej systému  $n$ -tého rádu bude prebiehať v  $n$  fázach, pričom k nim striedavo prislúchajú opačné medzné hodnoty akčného zásahu, t.j. hodnoty  $u = U_j$ ,  $u = U_{3-j}$ , kde  $j = 1, 2$  sa striedajú.

Zavedme označenie vlastných vektorov

$$\mathbf{v}_i = [\alpha_i \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_i^n \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_i^2 \\ 1 \\ \alpha_i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

a nových časových súradníc

$$\tilde{t}_i = \sum_{l=i}^n t_l \quad (4.2)$$

Začiatkový stav systému  $\mathbf{x}$  možno dekomponovať na súčet zložiek  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ , čo vedie vo všeobecnosti na systém nelineárnych algebrických rovníc

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(q_i, \tilde{t}_i), \quad \text{kde } \mathbf{x}_i(q_i, \tilde{t}_i) = e^{-A\tilde{t}_i} \mathbf{v}_i q_i + \int_0^{-\tilde{t}_i} e^{A\tau} \mathbf{b} d\tau q_i \quad (4.3)$$

ktorého riešením sú súradnice dekompozície  $q_i, \tilde{t}_i, i = 1, \dots, n$  pri uplatnení nasledovných obmedzujúcich podmienok

$$q_i \in \left\langle U_1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k, U_2 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k \right\rangle, \quad 0 \leq \tilde{t}_n \leq \tilde{t}_{n-1} \leq \dots \leq \tilde{t}_1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Výsledný riadiaci zásah časovo-suboptimálneho riadenia možno potom vyjadriť

$$u = \sum_{i=1}^n q_i \quad (4.5)$$

Pre výpočet jednotlivých zložiek bude dôležité opísať hranice pásiem proporcionálneho riadenia v priestore  $\mathbf{R}^n$  a naprogramovať podmienky vymedzujúce polohu zastupujúceho bodu voči jednotlivým segmentom pásma proporcionálneho riadenia  $PB$ .

## 5 Syntéza regulátorov s obmedzeniami pre systémy 3. rádu

Nosná časť práce sa zaoberá návrhom regulátorov s obmedzeniami pre systémy 3. rádu, menovite pre trojnásobný integrátor. Podstata návrhu spočíva v analýze v stavovom priestore a v geometrickej interpretácii riadenia so zadávaním pólov. Dominuje metóda nelineárnej dekompozície dynamiky, pri ktorej je stav systému dekomponovaný na jednotlivé módy, ktoré sú dané voľbou reálnych pólov uzatvoreného obvodu. Tým sú určené aj ciele riadenia pre jeho jednotlivé fázy.

### 5.1 Nelineárne časovo-suboptimálne riadenie založené na dekompozícii dynamiky

V tejto časti sa budeme venovať návrhu riadenia v prípade, kedy je nutné uvažovať obmedzenú akčnú veličinu (3.3). Trajektória zastupujúceho bodu so začiatočným stavom na priamke danej vlastným vektorom  $\mathbf{v}_1$  ležiacim mimo pásma proporcionálneho riadenia nebude totiž v dôsledku obmedzenia (3.3) sledovať túto priamku. Vo všeobecnosti trajektórie budú dané tromi fázami riadenia. Úlohou je opäť nájsť súradnice prislúchajúce ku každej fáze riadenia (bližšie pozri napr. Kabát, 2000, Ľapák a kol., 2006), pričom tieto fázy sú pre trojnásobný integrátor charakterizované nasledovne:

- prechod zastupujúceho bodu vo fázovom priestore k referenčnej brzdnej ploche (*RBS* – Reference Braking Surface) je daný  $\alpha_3, \mathbf{v}_3$ , resp. v prípade nasýtenia akčnej veličiny časom  $t_3$
- prechod pozdĺž *RBS* k referenčnej brzdnej krivke (*RBC*) je daný  $\alpha_2, \mathbf{v}_2$ , resp. v prípade nasýtenia akčnej veličiny časom  $t_2$
- prechod pozdĺž *RBC* do začiatku súradnicového systému je daný  $\alpha_1, \mathbf{v}_1$ , resp. v prípade nasýtenia akčnej veličiny časom  $t_1$

Každá fáza riadenia v tomto riadiacom algoritme pozostáva z riadenia s medznou akčnou veličinou a z lineárneho riadenia so zadávaním pólov. Každú fázu teda charakterizujú dva parametre  $t_i$  a  $\alpha_i$ , kde  $t_i$  je čas, ktorý je potrebný na dosiahnutie “lineárneho” podsystemu pomocou riadiaceho signálu na jednej z hraničných hodnôt a  $\alpha_i$  je pól opisujúci dynamiku prechodu zastupujúceho bodu  $\mathbf{x}_i$  vnútri lineárneho podsystemu (pásma proporcionálneho riadenia). Striedajú sa teda úseky riadenia s medznou akčnou veličinou a úseky, kde je prechod medzi medznými hodnotami akčnej veličiny opísaný príslušným zvoleným pólom  $\alpha_i$ .

Uvažujme trojnásobný integrátor opísaný vektorovou diferenciálnou rovnicou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

kde stavový vektor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  reprezentuje zastupujúci bod,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  je vstupný vektor a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ je matica systému.}$$

Kvôli zjednodušeniu zápisov nahradíme v ďalšom texte symbol  $\tilde{t}_i$  symbolom  $t_i$ , t.j. zavedieme substitúciu

$$\tilde{t}_i = t_i \quad (5.2)$$

pričom ale v skutočnosti pre novozavedené  $t_i$  platí, že je súčtom všetkých  $t_i$  podľa vzťahu (4.2), kde  $\tilde{t}_i = \sum_{i=1}^n t_i$ . Potom môžeme v súlade s nelineárnou dekompozíciou dynamiky vyjadriť jednotlivé subsystemy  $\mathbf{x}_1$  až  $\mathbf{x}_3$  pomocou vzťahu (4.3) a obmedzujúcich podmienok (4.4), čo vykonáme v ďalšom postupe.

Začneme od poslednej fázy riadenia (t.j. fázy, kedy sa zastupujúci bod dostáva do požadovaného stavu) a vyjadríme množinu bodov subsystemu  $\mathbf{x}_1$ , ktorá vlastne reprezentuje *RBC*.

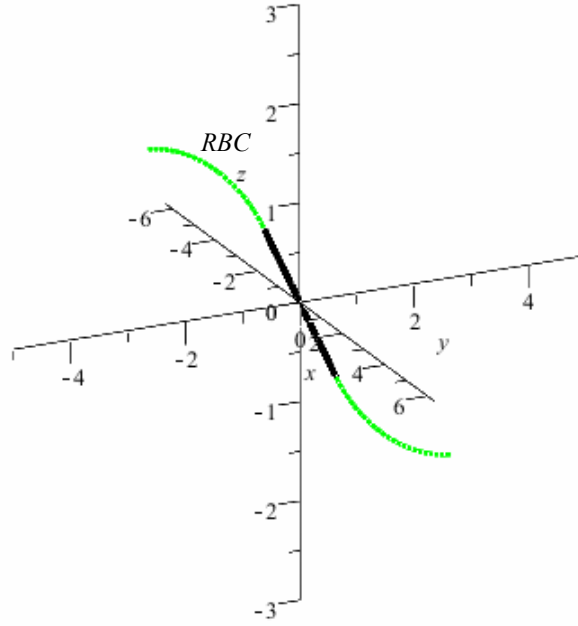
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(q_1, t_1) = e^{-\alpha_1 t_1} \mathbf{v}_1 q_1 + \int_0^{t_1} e^{\alpha_1 \tau} \mathbf{b} d\tau q_1 = \begin{bmatrix} q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^3} - \frac{t_1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{6} q_1 t_1^3 \\ q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{t_1}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{2} q_1 t_1^2 \\ \frac{q_1}{\alpha_1} - q_1 t_1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

pričom platí obmedzenie

$$\begin{aligned} &\text{ak } q_1 \in \langle U_1, U_2 \rangle \text{ potom } t_1 = 0 \\ &\text{inak } q_1 = U_j, j=1,2 \text{ a } t_1 > 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

*RBC* zobrazenú v priestore je možno vidieť na obr. 5.1, pričom boli zvolené parametre  $\alpha_1 = -1$ ,  $U_1 = -1$ ,  $U_2 = 1$ .

Môžeme postupovať ďalej späť v čase a vyjadriť strednú fázu riadenia pomocou množiny bodov druhého subsystemu  $\mathbf{x}_2$ , ktorá v súčte s  $\mathbf{x}_1$  (*RBC*) vytvorí v tomto prípade *RBS* (5.5).



Obr. 5.1 Referenčná brzdná krivka *RBC* pozostávajúca z lineárnej časti (čierna úsečka reprezentujúca proporcionálne pásmo) a „nelineárnej“ časti (zelené krivky reprezentujúce úseky s medznými hodnotami  $U_1$  a  $U_2$ ).

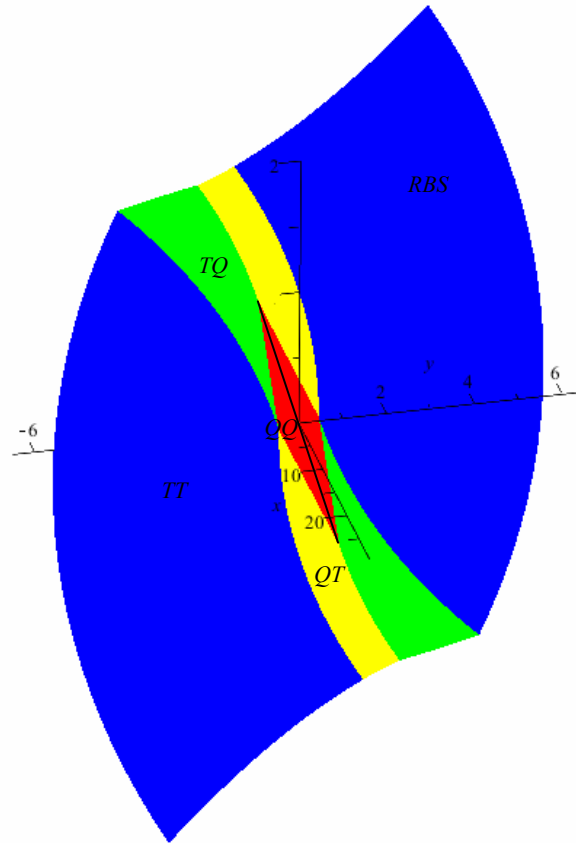
$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) = e^{-\Lambda t_1} \mathbf{v}_1 q_1 + \int_0^{-t_1} e^{\Lambda \tau} \mathbf{b} d\tau q_1 + e^{-\Lambda t_2} \mathbf{v}_2 q_2 + \int_0^{-t_2} e^{\Lambda \tau} \mathbf{b} d\tau q_2 = \\
 &= \begin{bmatrix} q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^3} - \frac{t_1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{6} q_1 t_1^3 + q_2 \left( \frac{1}{\alpha_2^3} - \frac{t_2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{2} \frac{t_2^2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{6} q_2 t_2^3 \\ q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{t_1}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{2} q_1 t_1^2 + q_2 \left( \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{t_2}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{2} q_2 t_2^2 \\ \frac{q_1}{\alpha_1} - q_1 t_1 + \frac{q_2}{\alpha_2} - q_2 t_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

pričom platí obmedzenie

$$\begin{aligned}
 &\text{ak } q_2 \in \langle U_1 - q_1, U_2 - q_1 \rangle \text{ potom } t_2 = 0 \\
 &\text{inak } q_2 = U_{3-j} - q_1, j=1,2 \text{ a } 0 < t_2 \leq t_1
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

a súčasne obmedzenie pre  $q_1$  a  $t_1$  (5.4).

Grafickú podobu celej *RBS* v priestore vyjadruje obr. 5.2, pričom boli zvolené číselné parametre  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $U_1 = -1$ ,  $U_2 = 1$ . *RBS* je rozdelená do niekoľkých segmentov, ktoré zodpovedajú určitej kombinácii parametrov  $q_i$  a  $t_i$ . Pre  $j=1$  (ako aj pre  $j=2$ ) existujú štyri rôzne segmenty *RBS*, označené kombináciou písmen  $Q$  a  $T$  podľa toho, ktoré parametre  $q_i$  a  $t_i$  sú v danom segmente premenlivé a tiež v akom poradí.



Obr. 5.2 Referenčná brzdná plocha  $RBS$  pre  $j=1,2$  pozostávajúca z jednotlivých segmentov prislúchajúcich lineárnej a „nelineárnej“ časti

Postupujúc v čase späť, zostáva vyjadriť množinu bodov prvej, t.j. začiatkovej fázy riadenia. Ziskáme ju tak, že k predchádzajúcim množinám bodov  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  pripočítame body tretieho subsystému  $\mathbf{x}_3$ . Z plochy  $RBS$  sa tak dostávame do priestoru. Aj v priestore bude existovať množina bodov, ktorú môžeme označiť za lineárnu časť subsystému  $\mathbf{x}_3$ . Sú to body pásma proporcionálneho riadenia, ktoré dostaneme, ak využijeme (4.1), (4.3) a (5.5), pričom  $t_3 = 0$

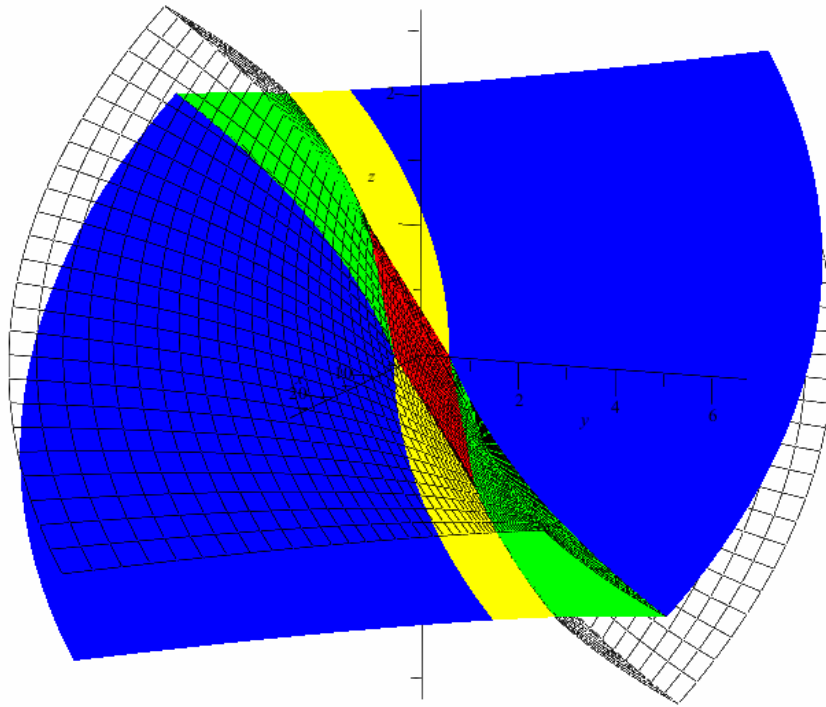
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) + \mathbf{x}_3(q_3, 0) = \mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) + \mathbf{v}_3 q_3 = \\ &= \begin{bmatrix} q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^3} - \frac{t_1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{6} q_1 t_1^3 + q_2 \left( \frac{1}{\alpha_2^3} - \frac{t_2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{2} \frac{t_2^2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{6} q_2 t_2^3 + \frac{q_3}{\alpha_3} \\ q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{t_1}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{2} q_1 t_1^2 + q_2 \left( \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{t_2}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{2} q_2 t_2^2 + \frac{q_3}{\alpha_3} \\ \frac{q_1}{\alpha_1} - q_1 t_1 + \frac{q_2}{\alpha_2} - q_2 t_2 + \frac{q_3}{\alpha_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde platí obmedzenie

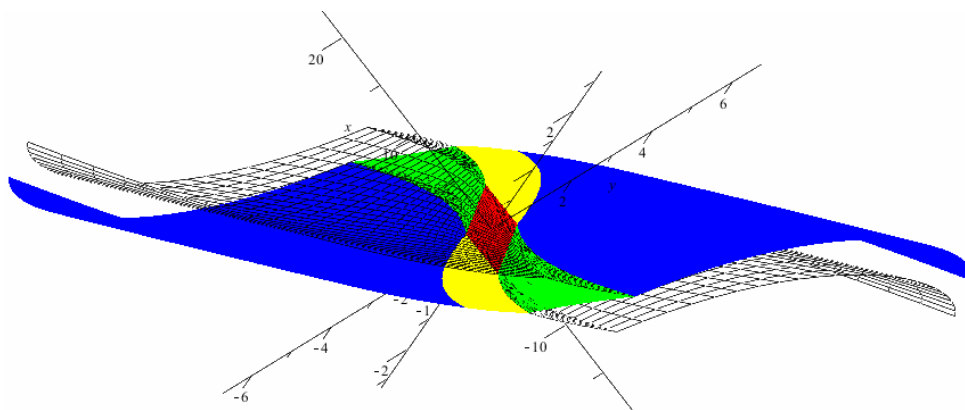
$$q_3 \in \langle U_1 - q_1 - q_2 \quad U_2 - q_1 - q_2 \rangle \quad (5.8)$$

a súčasne obmedzenia (5.4) a (5.6).

Pásno proporcionálneho riadenia označujeme  $PB$  (z angl. Proportional Band) definujeme ako podmnožinu stavového priestoru, v ktorej výsledná riadiaca veličina  $u$  leží v rozsahu povolených obmedzení (3.3). Určenie polohy zastupujúceho bodu  $\mathbf{x}$  v  $PB$  má preto z hľadiska riadenia zásadný význam. Matematické vyjadrenie  $PB$  pre systém (5.1) predstavuje vzťah (5.7) s obmedzeniami (5.8), (5.4) a (5.6). Kompletné  $PB$  je vykreslené na obr. 5.3 a 5.4 pre zvolené hodnoty parametrov  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = -3$ ,  $U_1 = -1$ ,  $U_2 = 1$ ,  $j = 1, 2$ .



Obr. 5.3 Celkové pásno proporcionálneho riadenia  $PB$



Obr. 5.4 Pásno proporcionálneho riadenia  $PB$  z iného uhla pohľadu

Ak budeme uvažovať  $q_3$  neobmedzené (neobmedzená lineárna časť subsystému  $\mathbf{x}_3$ ), je možné ľubovoľný stav reprezentovaný zastupujúcim bodom  $\mathbf{x}$  v priestore dekomponovať na zložky  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  a  $\mathbf{x}_3$ , ku ktorým treba nájsť súradnice  $q_i$  a  $t_i$  tým, že získame riešenie systému vo všeobecnosti nelineárnych algebrických rovníc (5.7) s obmedzujúcimi podmienkami (5.4), (5.6) a následne  $q_3$  obmedzíme podľa (5.8).

## 5.2 Realizácia algoritmu nelineárneho časovo-suboptimálneho riadenia založeného na dekompozícii dynamiky

Ako bolo ukázané vyššie, výsledný algoritmus pre výpočet riadiaceho zásahu môže vychádzať z dekompozície stavu (5.7) a uplatnenia obmedzení (5.4), (5.6) a (5.8). Pretože samotný systém (5.7) pozostáva z 3 rovníc o 5 neznámych, je pre jeho praktické vyriešenie potrebné dosadiť najskôr určité možné kombinácie neznámych  $q_i$  a  $t_i$ , aby sa ich počet v systéme zredukoval na 3. Možné kombinácie neznámych  $q_i$  a  $t_i$  sú dané obmedzeniami (5.4) a (5.6). Zo (5.4) napr. vyplýva, že ak sa mení  $q_1$  tak  $t_1$  poznáme ( $t_1=0$ ). Platí to aj naopak. Ak sa mení  $t_1$  tak  $q_1$  je známe ( $q_1 = U_j$ ), pričom však tentokrát to môže byť jedna z dvoch hraničných hodnôt, čo je ošetrené parametrom  $j = 1,2$ . Pre jednotlivé segmenty *RBS* označené ako *QQ*, *TQ*, *TT* a *QT* platia nasledovné kombinácie:

1. pre *QQ* platí  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0$ ,  $j = 1$
2. pre *TQ* platí  $q_1 = U_j$ ,  $t_2 = 0$ ,  $j = 1$
3. pre *TT* platí  $q_1 = U_j$ ,  $q_2 = U_{3-j} - U_j$ ,  $j = 1$
4. pre *TQ* platí  $t_1 = 0$ ,  $q_2 = U_{3-j} - q_1$ ,  $j = 1$

Ak uplatníme na vyššie uvedené kombinácie hodnotu parametra  $j = 2$ , dostávame ďalšie štyri kombinácie zodpovedajúce segmentom druhej polovice *RBS*. Celkovo teda existuje 8 kombinácií troch parametrov  $q_i$ ,  $t_i$  a  $j$ , pretože každý z nich môže nadobúdať dve rôzne hodnoty. Tieto je potrebné dosadiť do systému (5.7), čím získame 8 systémov nelineárnych algebrických rovníc. Tie riešime v obore reálnych čísel, pričom dostávame viacero riešení, z ktorých za výsledné riešenie považujeme to, ktoré spĺňa obmedzenia (5.4) a (5.6). Po získaní parametrov  $q_i, i=1,2,3$  možno riadiacu veličinu vypočítať súčtom jednotlivých zložiek, ktorý ale obmedzíme podľa (3.3)

$$u = \text{sat} \left( \sum_{i=1}^3 q_i \right) \quad (5.9)$$

Presný postup riešenia sumarizuje nasledovný riadiaci algoritmus.

1. START
2. Segment QQ
  - a. FOR j=1 to 2
  - b. SUBSTITUTE  $t_1 = 0, t_2 = 0$  in (5.7)
  - c. SOLVE (5.7) for  $q_1, q_2, q_3$
  - d. IF (5.4) AND (5.6) THEN RETURN  $u = \text{sat} \left( \sum_{i=1}^3 q_i \right)$
  - e. END FOR
3. Segment TQ
  - a. FOR j=1 to 2
  - b. SUBSTITUTE  $q_1 = U_j$ ,  $t_2 = 0$  in (5.7)
  - c. SOLVE (5.7) for  $t_1, q_2, q_3$

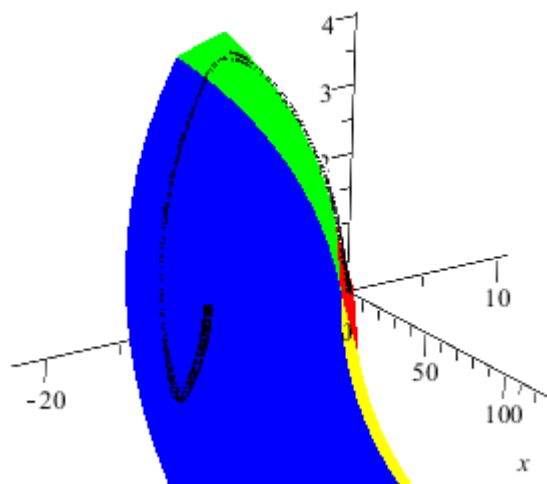


- d. IF (5.4) AND (5.6) THEN RETURN  $u = \text{sat}\left(\sum_{i=1}^3 q_i\right)$
  - e. END FOR
  4. Segment QT
    - a. FOR j=1 to 2
    - b. SUBSTITUTE  $q_2 = U_{3-j} - q_1, t_1 = 0$  in (5.7)
    - c. SOLVE (5.7) for  $q_1, q_3, t_2$
    - d. IF (5.4) AND (5.6) THEN RETURN  $u = \text{sat}\left(\sum_{i=1}^3 q_i\right)$
    - e. END FOR
  5. Segment TT
    - a. FOR j=1 to 2
    - b. SUBSTITUTE  $q_1 = U_j, q_2 = U_{3-j} - U_j$  in (5.7)
    - c. SOLVE (5.7) for  $q_3, t_1, t_2$
    - d. IF (5.4) AND (5.6) THEN RETURN  $u = \text{sat}\left(\sum_{i=1}^3 q_i\right)$
    - e. END FOR
- (5.10)

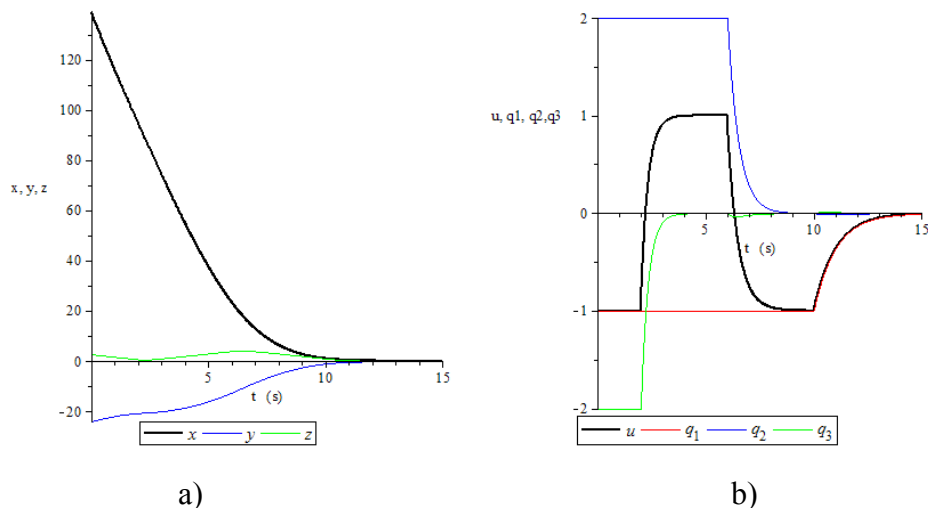
### 5.3 Verifikácia algoritmu riadenia simuláciou z rôznych počiatkových stavov

V tejto časti vykonáme simulácie prechodového deja z rôznych počiatkových podmienok, aby sme overili správnosť algoritmu (5.10). Výpočet aj simulácie budú zrealizované v systéme počítačovej algebry Maple. Hodnoty parametrov v nasledovných simuláciách boli:  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = -3$ ,  $U_1 = -1$ ,  $U_2 = 1$ .

Zvoľme začiatkový bod tak, že bude prislúchať segmentu *TT*, ale bude nad pásmom *PB*. Začiatkový bod bude  $\mathbf{x}_0 = [138.935, -24.056, 2.667]^T$



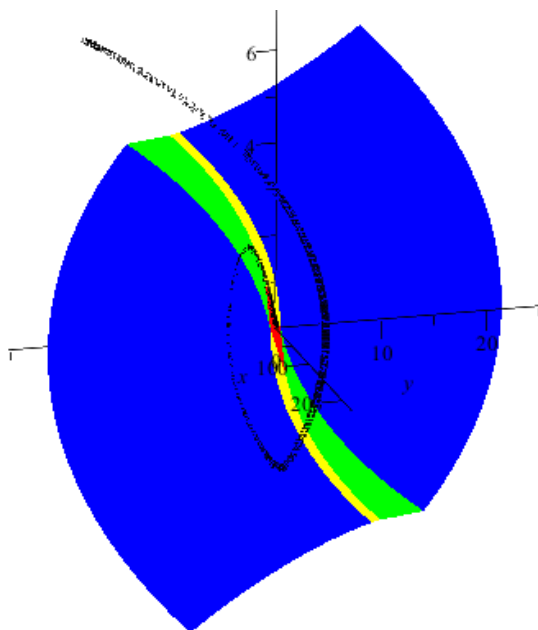
Obr. 5.5 Fázová trajektória začínajúca nad segmentom *TT* a ležiaca mimo *PB*



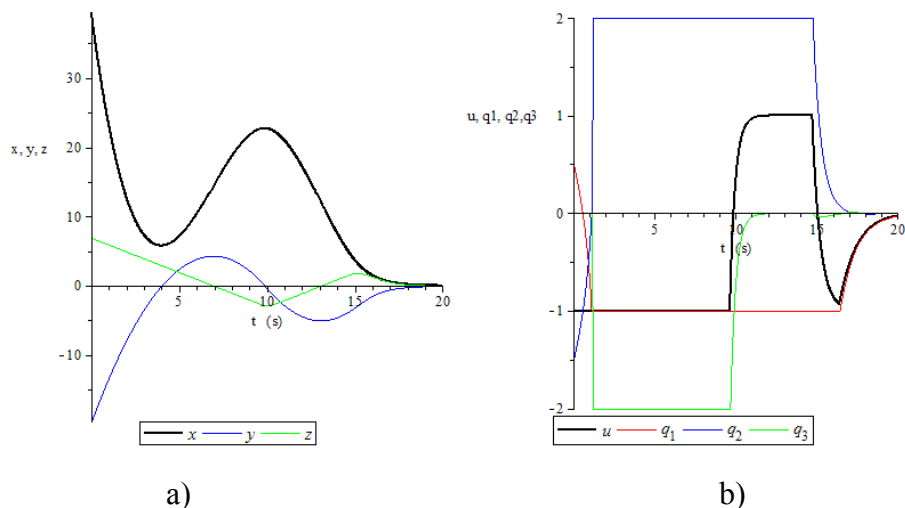
Obr. 5.6 Časové priebehy stavových (a) a riadiacich veličín (b)

Začiatkový bod leží nad  $PB$ , čomu v tomto prípade odpovedá medzná hodnota akčnej veličiny  $u = U_1$ . Zastupujúci bod  $\mathbf{x}$  sa pohybuje smerom k hraniciam  $PB$ , ktoré dosiahne nad segmentom  $TT$  (obr. 5.5). V tomto okamihu sa začne meniť akčná veličina z medznej hodnoty  $u = U_1$  na opačnú medznú hodnotu  $u = U_2$  (obr. 5.6b). Ďalej bod pokračuje po  $RBS$ , najskôr po segmente  $TT$  a neskôr po segmente  $TQ$ . Akonáhle však dosiahne segment  $TQ$ , začne sa opäť meniť akčná veličina z medznej hodnoty  $u = U_2$  na opačnú medznú hodnotu  $u = U_1$ . S touto akčnou veličinou sa potom bod pohybuje po  $RBC$ , až sa dostane k jej lineárnej časti ( $RBL$ ), po ktorej sklzne do začiatku súradnicového systému, pričom akčná veličina exponenciálne klesá z medznej hodnoty  $u = U_1$  na  $0$ . V prípade tohto začiatkového bodu sa teda prejavili všetky tri fázy riadenia typické pre systémy tretieho rádu.

Ďalej otestujme algoritmus na začiatkovom bode, ktorý prislúcha segmentu  $QT$  a leží nad opačnou polovicou  $PB$  (t.j.  $j = 2$ ). Začiatkový bod je  $\mathbf{x}_0 = [39.512, -19.597, 6.917]^T$



Obr. 5.7 Fázová trajektória začínajúca nad segmentom  $QT$  mimo  $PB$  pre  $j = 2$



Obr. 5.8 Časové priebehy stavových (a) a riadiacich veličín (b)

Z obr. 5.7 vidno, že bol zvolený taký začiatkový bod, z ktorého fázový prechod nevedie smerom k  $PB$ , ale v dôsledku obmedzenia ide pozdĺž  $PB$ , až je privedený do opačného fázového polpriestoru ( $j = 1$ ), kde smeruje cez  $PB$  k  $RBS$ , menovite k segmentu  $TT$  a ďalej cez segment  $TQ$  až na  $RBC$  a po nej do začiatku súradnicového systému. Zatiaľ čo predchádzajúce časové priebehy stavovej veličiny  $x$  boli monotónne, tentokrát sme svedkami jej kmitavého priebehu (obr. 5.8a). O priebehoch zložiek  $q_i$  riadiacej veličiny  $u$  platí, že nezodpovedajú reálnej dekompozícii dynamiky v dôsledku voľby zjednodušeného rozkladu (5.7). Samotná riadiaca veličina  $u$  pozostáva z troch intervalov riadenia, pričom v každom atakuje medznú hodnotu s výnimkou posledného, kedy sa začala utlmovať tesne pred dosiahnutím medznej hodnoty  $u = U_1$ .

Záverom tejto časti môžeme zhrnúť, že sa nám podarilo úspešne navrhnúť algoritmus pre výpočet časovo-suboptimálneho riadenia pomocou dekompozície dynamiky. Simuláciami sme ukázali, že navrhnuté riadenie vo všeobecnosti pozostáva z troch intervalov riadenia, čo zodpovedá teórii časovo optimálneho riadenia, avšak prechody medzi jednotlivými intervalmi riadenia sú spojité a ich dynamika je daná voľbou pólov uzavretého obvodu, čo tomuto algoritmu prináša nespornú výhodu v mnohých praktických aplikáciách. Takéto riadenie môže byť použité na riadenie systémov s nemodelovanou dynamikou, napr. s parazitnými časovými konštantami alebo oneskoreniami. Vďaka symbolickým výpočtom realizovaným v systéme počítačovej algebry Maple, návrh algoritmov riadenia môže byť rýchlo modifikovaný pre rôzne systémy 3. rádu (Bisták a kol., 2006b).

Nevýhodou navrhnutého riadiaceho algoritmu (5.10) je skutočnosť, že algoritmus využíva na riešenie systému rovníc (5.7) konkrétnu funkciu `solve`, ktorá je implementovaná v prostredí Maple, čím je obmedzené jeho použitie na toto prostredie. Navrhnutý algoritmus je síce možné implementovať aj v prostredí Matlab, ale vyžaduje si to dodatočné modifikácie. Ďalším cieľom preto bolo dospieť k exaktnému vyjadreniu riadiacej veličiny, čím by sa potlačila závislosť na konkrétnom prostredí. To je možné za cenu určitých zjednodušení vykonaných v ďalšej časti.

## 5.4 Zjednodušenie návrhu nelineárneho časovo-suboptimálneho riadenia

Doposiaľ bol výpočet riadiacej veličiny  $u$  založený na riešení systému (5.7). Toto riešenie však neexistuje v analytickom tvare. Cieľom tejto časti je modifikovať dekompozíciu

dynamiky tak, aby bolo možné nájsť explicitné analytické vyjadrenie riadiacej veličiny  $u$ . Ukážeme, že vhodnou modifikáciou dekompozície dynamiky vieme dosiahnuť aj to, že bude možné lokalizovať začiatkový stav vo vzťahu k jednotlivým segmentom  $RBS$  a v riadiacom algoritme teda nebude nutné prechádzať cez všetky segmenty a hľadať v nich prípustné riešenia.

Podstata modifikácie dekompozície dynamiky bude spočívať v novo zavedenom rozklade stavu  $\mathbf{x}$ , kedy na rozdiel od (5.7) bude posledný subsystem  $\mathbf{x}_3$  orientovaný v smere osi  $x$ , čo znamená, že pôvodne vlastný vektor  $\mathbf{v}_3$  bude nahradený vektorom  $\mathbf{v}_x$  rovnobežným s osou  $x$ .

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_x q_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_x, \quad q_x \in R \quad (5.11)$$

Namiesto  $q_3$  sme zaviedli označenie  $q_x$ . Potom nový rozklad stavu  $\mathbf{x}$  bude

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) + \mathbf{v}_x q_x = \\ &= \begin{bmatrix} q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^3} - \frac{t_1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{6} q_1 t_1^3 + q_2 \left( \frac{1}{\alpha_2^3} - \frac{t_2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{2} \frac{t_2^2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{6} q_2 t_2^3 + q_x \\ q_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{t_1}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{2} q_1 t_1^2 + q_2 \left( \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{t_2}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{2} q_2 t_2^2 \\ \frac{q_1}{\alpha_1} - q_1 t_1 + \frac{q_2}{\alpha_2} - q_2 t_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Výhodou takéhoto rozkladu je, že pomocou neho vieme analyticky vyjadriť súradnicu  $q_x$ , pretože táto sa vyskytuje iba v prvom riadku vektorovej rovnice (5.12). Zo spodných dvoch riadkov je preto možné zistiť  $q_1$  resp.  $t_1$  a  $q_2$  resp.  $t_2$ . Potom je možné tieto zistené hodnoty dosadiť do horného riadku vektorovej rovnice (5.12) a z neho izolovať  $q_x$  ako funkciu stavov  $x, y, z$ . Rozklad (5.12) však nemá identické vlastnosti ako rozklad (5.7), pretože subsystem  $\mathbf{x}_3$  sa nepohybuje v smere vlastného vektora  $\mathbf{v}_3$  a preto ani nemožno súradnicu  $q_x$  považovať priamo za jednu zo zložiek riadiaceho zásahu, ako tomu bolo v prípade  $q_3$  vo vzťahu (5.9). Dekompozícia dynamiky je v tomto prípade porušená, stále však môžeme využiť geometrickú interpretáciu riadenia so zadávaním pólov. Súradnica  $q_x$  totiž predstavuje orientovanú vzdialenosť zastupujúceho bodu  $\mathbf{x}$  v smere osi  $x$  od referenčnej brzdnjej plochy  $RBS$  (resp. od niektorého z jej segmentov  $QQ, TQ, TT$  alebo  $QT$ ). Zo (5.12) totiž dostávame

$$\mathbf{v}_x q_x = \mathbf{x} - (\mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2)) \quad (5.13)$$

a pretože  $\mathbf{v}_x$  je jednotkový vektor a suma  $\mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2)$  predstavuje  $RBS$ , ako to vyplýva zo vzťahu (5.5),  $q_x$  je orientovanou vzdialenosťou v smere osi  $x$  od  $RBS$ .

Geometrická interpretácia riadenia so zadávaním pólov hovorí o proporcionálnom znižovaní vzdialenosti zastupujúceho bodu od referenčného objektu. Túto vlastnosť teraz využijeme na odvodenie výsledného riadiaceho zásahu, keď stanovíme podmienku, aby

orientovaná vzdialenosť  $q_x$  klesala v čase priamo úmerne vzdialenosti samotnej s konštantou úmernosti  $\alpha_3$

$$\frac{dq_x}{dt} = \alpha_3 q_x \quad (5.14)$$

Poznamenajme, že pre  $\alpha_3$  už nemusí platiť  $\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < 0$ , pretože  $\mathbf{v}_x$  už nie je vlastným vektorom, ale vektorom, ktorý je pevne daný vzťahom (5.11). Stačí, aby  $\alpha_3$  spĺňalo  $\alpha_3 < 0$ . Pred uplatnením podmienky (5.12) však najskôr získajme analytické vyjadrenie *RBS* v tvare

$$x = f(y, z) ; f : R^2 \rightarrow R \quad (5.15)$$

čo je možné odvodiť z parametrického vyjadrenia *RBS* vo vektorovom tvare (5.5) tak, že z rovníc odpovedajúcich stavovým súradniciam  $y, z$  vyjadríme parametre  $q_1$  resp.  $t_1$  a  $q_2$  resp.  $t_2$  ako funkcie týchto stavov. Potom je možné takto získané vyjadrenia dosadiť do rovnice odpovedajúcej stavovej súradnici  $x$  (prvý riadok vektorovej rovnice), aby sme získali *RBS* v tvare (5.15).

Analytický tvar *RBS* (5.15) využijeme na vyjadrenie vzdialenosti  $q_x$ , keď z prvého riadku vektorovej rovnice (5.13) dostávame

$$q_x = x - f(y, z) \quad (5.16)$$

Ak teraz dosadíme (5.16) do (5.14), tak získavame rovnicu

$$\frac{dq_x}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{df(y, z)}{dt} = y - \frac{df(y, z)}{dy} z - \frac{df(y, z)}{dz} u = \alpha_3 (x - f(y, z)) \quad (5.17)$$

z ktorej môže byť vyjadrená riadiaca veličina  $u$

$$u = \frac{-\alpha_3 (x - f(y, z)) + y - \frac{df(y, z)}{dy} z}{\frac{df(y, z)}{dz}} \quad (5.18)$$

Výsledná riadiaca veličina  $u$  musí byť ešte obmedzená podľa (3.3).

Je možné si všimnúť, že vo vzťahu (5.18) je jediným nevyjadreným členom výraz  $f(y, z)$ , ktorý reprezentuje *RBS*. Pretože tento výraz sa mení v závislosti na segmente *RBS*, budeme v nasledovnom vyhodnocovať jeho vyjadrenie spolu s analytickým vyjadrením riadiacej veličiny  $u$  pri každom segmente individuálne.

#### 5.4.1 Riadenie pre segment *QQ*

Segment *QQ* získame z rovnice *RBS* (5.5) pre  $t_1, t_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{\alpha_1^3} + \frac{q_2}{\alpha_2^3} \\ \frac{q_1}{\alpha_1^2} + \frac{q_2}{\alpha_2^2} \\ \frac{q_1}{\alpha_1} + \frac{q_2}{\alpha_2} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

kde z posledných dvoch riadkov pre parametre  $q_1$  a  $q_2$  platí

$$q_1 = -\frac{\alpha_1^2(z - y\alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (5.20)$$

$$q_2 = \frac{\alpha_2^2(-\alpha_1 y + z)}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (5.21)$$

Dosadením (5.20) a (5.21) do (5.19) získavame z prvého riadku analytickej vyjadrenie segmentu  $QQ$  v tvare (5.15)

$$x = f(y, z) = -\frac{z - y\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{-\alpha_1 y + z}{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (5.22)$$

Podľa (5.18) výsledná riadiaca veličina  $u$  vychádza v tvare

$$u = \alpha_1\alpha_2\alpha_3x - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)y + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)z \quad (5.23)$$

čo je identické s výsledkom podľa Ackermannovho vzorca (Ackermann, 1972).

#### 5.4.2 Riadenie pre segment $TQ$

Segment  $TQ$  dostaneme, ak vo výraze pre  $RBS$  (5.5) dosadíme  $q_1 = U_j$  a  $t_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_j \left( \frac{1}{\alpha_1^3} - \frac{t_1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{6} U_j t_1^3 + \frac{q_2}{\alpha_2^3} \\ U_j \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{t_1}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{2} U_j t_1^2 + \frac{q_2}{\alpha_2^2} \\ \frac{U_j}{\alpha_1} - U_j t_1 + \frac{q_2}{\alpha_2} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Postup je analogický predošlému segmentu. Rozdiel spočíva v tom, že tentokrát vyjadrujeme zo spodných dvoch riadkov parametre  $t_1$  a  $q_2$ , pričom vzniknutý systém obsahuje jednu lineárnu a jednu kvadratickú rovnicu. Z dvoch riešení kvadratickej rovnice je nutné vybrať to, ktoré zabezpečí kladnú hodnotu parametra  $t_1$  (t.j. kladné znamienko pred odmocninou). Potom ak označíme diskriminant  $DTQ$

$$DTQ = -2\alpha_1^2 U_j z \alpha_2 + \alpha_1^2 U_j^2 - U_j^2 \alpha_2^2 + 2y \alpha_1^2 \alpha_2^2 U_j \quad (5.25)$$

parametre  $q_2$  a  $t_1$  môžu byť vyjadrené

$$q_2 = \frac{z \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 U_j + \text{sign}(U_j) \sqrt{DTQ}}{(U_{3-j} - U_j) \alpha_1} \quad (5.26)$$

$$t_1 = -\frac{-U_j \alpha_2 + \alpha_1 U_j - \text{sign}(U_j) \sqrt{DTQ}}{U_j \alpha_1 \alpha_2} \quad (5.27)$$

Opäť dosadíme (5.26) a (5.27) do prvej rovnice (5.24) a získame v Maple vyjadrenie pre segment  $TQ$

$$\begin{aligned}
x = & \frac{1}{6} \frac{1}{U_j^2 \alpha_1^3 \alpha_2^3} \left( 2 U_j^3 \alpha_2^3 + 3 U_j^3 \alpha_2^2 \alpha_1 - 3 U_j^2 \right. \\
& \alpha_2^2 \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} - 5 \alpha_1^3 U_j^3 + 3 \alpha_1^2 U_j^2 \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} \\
& \left. + 3 \alpha_1 U_j \operatorname{sign}(U_j)^2 DTQ - \operatorname{sign}(U_j) DTQ^{3/2} + 6 \alpha_1^3 U_j^2 z \alpha_2 \right)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Zo (5.18) dostávame výslednú riacu veličinu  $u$

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{3} \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_1^4 (-y \alpha_2 + z)} \left( -3 \alpha_2^4 \alpha_1^4 z y + 2 \alpha_3 U_j^2 \alpha_2^2 \alpha_1^2 - \alpha_3 U_j \right. \\
& \alpha_2^3 \alpha_1^2 z + \alpha_3 U_j \alpha_2^4 y \alpha_1^2 + \alpha_3 \alpha_1^4 U_j z \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_1^4 U_j y \alpha_2^2 + 2 \alpha_3 \\
& \alpha_1^4 z^2 \alpha_2^2 - \alpha_3 U_j^2 \alpha_2^4 - \alpha_3 \alpha_1^4 U_j^2 - 3 y \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} \alpha_1^3 \alpha_2^3 \\
& - \alpha_3 \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} U_j \alpha_2^3 + \alpha_3 \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} \alpha_1^3 U_j \\
& - 4 \alpha_3 \alpha_1^4 z \alpha_2^3 y + 2 \alpha_3 y^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4 + 3 \alpha_2^2 \alpha_1^3 z \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} \\
& - 3 \alpha_3 \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} \alpha_1^3 y \alpha_2^2 + 3 \alpha_3 \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DTQ} x \alpha_1^3 \\
& \left. \alpha_2^3 + 3 \alpha_2^3 \alpha_1^4 z^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

### 5.4.3 Riadenie pre segment $TT$ a $QT$

Podobným postupom dokážeme exaktne vyjadriť riacu veličinu v segmente  $TT$

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{3} \left( -6 U_{3-j}^2 \alpha_3 \sqrt{DTT} x \alpha_2^3 \alpha_1^3 - 4 U_{3-j}^2 \alpha_3 \alpha_2^4 z^2 \alpha_1^4 y + 12 \right. \\
& U_{3-j}^2 U_j \alpha_1^4 \alpha_2^4 z y + 6 U_{3-j}^3 \alpha_3 U_j \alpha_1^4 y \alpha_2^2 + 2 U_{3-j}^3 \alpha_3 U_j \alpha_2^4 y \\
& \alpha_1^2 - U_{3-j}^2 \alpha_3 \alpha_2^4 U_j z^2 \alpha_1^2 + 2 U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j^2 \alpha_2^4 y \alpha_1^2 - 8 \\
& U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j y^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4 - 3 U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j \alpha_2^2 z^2 \alpha_1^4 - 2 U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j^2 \\
& \alpha_1^4 y \alpha_2^2 + U_{3-j} \alpha_3 U_j^2 \alpha_2^2 z^2 \alpha_1^4 - U_{3-j} \alpha_3 U_j^2 \alpha_2^4 z^2 \alpha_1^2 + \alpha_3 \\
& \alpha_1^4 U_{3-j}^5 - 2 \alpha_3 \sqrt{DTT} \alpha_2^3 z^3 \alpha_1^3 - 2 \alpha_3 U_j \alpha_2^4 z^4 \alpha_1^4 + 6 U_{3-j}^2 \\
& \alpha_1^3 \alpha_2^3 y \sqrt{DTT} - 6 U_{3-j} \alpha_1^3 \alpha_2^3 z^2 \sqrt{DTT} - 6 U_{3-j}^3 \alpha_1^4 \alpha_2^4 z y \\
& - 4 U_{3-j}^4 \alpha_3 \alpha_1^4 y \alpha_2^2 + 2 U_{3-j}^3 \alpha_3 \alpha_2^2 z^2 \alpha_1^4 + 4 U_{3-j}^3 \alpha_3 y^2 \alpha_1^4 \\
& \alpha_2^4 + U_{3-j} \alpha_3 \alpha_2^4 z^4 \alpha_1^4 - 6 U_{3-j}^3 U_j \alpha_1^4 \alpha_2^2 z + 3 U_{3-j}^2 U_j^2 \alpha_1^4 \\
& \alpha_2^2 z - 3 U_{3-j}^2 U_j^2 \alpha_1^2 \alpha_2^4 z - 6 U_{3-j} U_j \alpha_1^4 \alpha_2^4 z^3 - 2 \\
& U_{3-j}^2 \alpha_3 \sqrt{DTT} U_j \alpha_1^3 + 2 U_{3-j}^2 \alpha_3 \sqrt{DTT} U_j \alpha_2^3 - \\
& U_{3-j}^4 \alpha_3 U_j \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 3 U_{3-j}^3 \alpha_3 U_j^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 2 U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j^3 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \\
& + 2 U_{3-j}^3 \alpha_3 \sqrt{DTT} \alpha_1^3 - U_{3-j}^4 \alpha_3 U_j \alpha_1^4 - U_{3-j}^3 \alpha_3 U_j^2 \alpha_1^4 + \\
& U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j^3 \alpha_1^4 - 2 U_{3-j}^3 \alpha_3 U_j^2 \alpha_2^4 + U_{3-j}^2 \alpha_3 U_j^3 \alpha_2^4 + 3 \\
& U_{3-j}^4 \alpha_1^4 \alpha_2^2 z + 3 U_{3-j}^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4 z^3 + 6 U_{3-j} \alpha_3 \sqrt{DTT} \alpha_2^3 z \alpha_1^3 y \\
& + 8 U_{3-j} \alpha_3 U_j \alpha_2^4 z^2 \alpha_1^4 y) / \left( (z \alpha_1^2 U_{3-j}^3 - 2 U_{3-j}^2 \alpha_1^2 z y \alpha_2^2 \right. \\
& - 2 U_{3-j}^2 \alpha_1^2 U_j z + 4 U_{3-j} \alpha_1^2 \alpha_2^2 U_j z y + U_{3-j} \alpha_1^2 \alpha_2^2 z^3 \\
& + U_{3-j} \alpha_1^2 U_j^2 z + 2 U_{3-j} y \sqrt{DTT} \alpha_2 \alpha_1 - U_{3-j} U_j^2 \alpha_2^2 z \\
& \left. - 2 U_j z^3 \alpha_2^2 \alpha_1^2 - 2 z^2 \sqrt{DTT} \alpha_2 \alpha_1) \alpha_1^2 \alpha_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

a v segmente  $QT$

$$\begin{aligned}
u = \frac{1}{3} & \left( -3 y \alpha_1^3 \alpha_2^3 U_{3-j}^2 + 3 \alpha_1^3 \alpha_2^3 U_{3-j} z^2 + 3 \alpha_1^2 \right. \\
& \alpha_2^2 U_{3-j} z \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DQT} + 3 \alpha_3 x \alpha_1^3 \alpha_2^3 U_{3-j}^2 + \alpha_3 z^3 \alpha_1^3 \alpha_2^3 \\
& - 3 \alpha_3 \alpha_1^3 z \alpha_2^3 y U_{3-j} - \alpha_3 \alpha_1^3 U_{3-j}^3 - \alpha_3 \alpha_2^3 U_{3-j}^3 \\
& + \alpha_3 \operatorname{sign}(U_j) DQT^{3/2} \left. \right) / \left( \alpha_1^2 \alpha_2^2 (z^2 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 y U_{3-j} \right. \\
& \left. + \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DQT} z) \right)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

pričom v segmente  $QT$  budeme vo výslednom algoritme potrebovať ešte vyjadrenie parametra  $q_1$

$$q_1 = \frac{-\alpha_2 U_{3-j} + \operatorname{sign}(U_j) \sqrt{DQT}}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{5.32}$$

## 5.5 Zjednodušený algoritmus riadenia

Riadiaci algoritmus pozostáva z lokalizácie začiatočného stavu  $\mathbf{x}$  v jednom z vyššie spomínaných segmentov  $RBS$  a následne z výpočtu hodnoty riadiacej veličiny v danom segmente. Prvým krokom však musí byť určenie parametra  $j$ , ktorý rozhoduje v ktorom polpriestore sa začiatočný bod nachádza. Pomôže nám ho určiť výpočet parametrov  $q_1$  a  $q_2$ . Ďalej podľa týchto parametrov vieme tiež nájsť, do ktorého segmentu začiatočný bod  $\mathbf{x}$  prislúcha a tým pádom uplatniť zodpovedajúci vzťah pre výpočet riadiacej veličiny  $u$ . Riadiaci algoritmus je nasledovný

START

1. Vyhodnot'  $q_1$  podľa (5.20) a  $q_2$  podľa (5.22)
2. IF  $q_1$  splňa (4.4) AND  $q_2$  splňa (4.4) THEN vypočítaj  $u$  podľa (5.23) , RETURN  $\operatorname{sat}(u) - \operatorname{Segment} QQ$
3. IF  $q_1$  splňa (4.4) AND  $q_2$  NEsplňa (4.4) THEN vypočítaj  $j = \frac{3 - \operatorname{sign}(q_2)}{2}$  AND GOTO 8
4. Vypočítaj  $j = \frac{3 + \operatorname{sign}(q_1)}{2}$ ,  $q_1 = U_j$  a  $q_2$  podľa (5.26)
5. IF  $q_2$  splňa (4.4) THEN vypočítaj  $u$  podľa (5.29) , RETURN  $\operatorname{sat}(u) - \operatorname{Segment} TQ$
6. IF  $q_2 U_j < 0$  THEN vypočítaj  $u$  podľa (5.30) , RETURN  $\operatorname{sat}(u) - \operatorname{Prvá} \text{ časť } \operatorname{segmentu} TT$
7. Vyhodnot'  $j = \frac{3 - \operatorname{sign}(q_1)}{2}$
8. Vypočítaj  $q_1$  podľa (5.32)
9. IF  $q_1$  splňa (4.4) THEN vypočítaj  $u$  podľa (5.31), RETURN  $\operatorname{sat}(u) - \operatorname{Segment} QT$
10. Vypočítaj  $u$  podľa (5.30), RETURN  $\operatorname{sat}(u) - \operatorname{Druhá} \text{ časť } \operatorname{segmentu} TT$

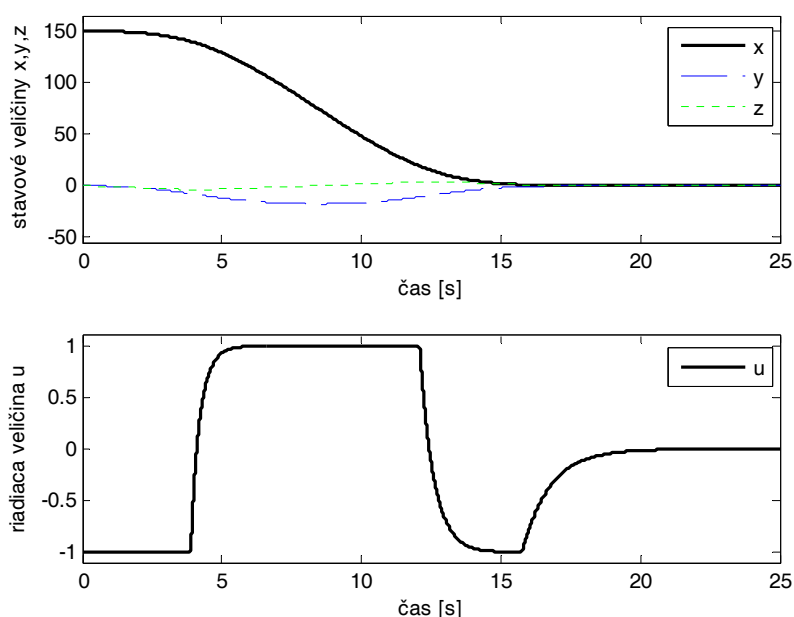
END (5.33)



Výsledná riadiaca veličina  $u$  je na výstupe z algoritmu (5.33) vždy ešte obmedzená funkciou  $sat()$  podľa vzťahu (3.3).

## 5.6 Overenie zjednodušeného algoritmu riadenia simuláciou

V tejto časti uvedieme prechodové deje s riadením podľa zjednodušeného algoritmu (5.33), ktoré sa líšia začiatočnými podmienkami a hranicami obmedzenia akčného signálu. Na obr. 5.9 je možné vidieť odozvy systému (5.1) s riadením podľa (5.33) zo začiatočného stavu  $\mathbf{x}_0 = [150 \ 0 \ 0]^T$ , pričom obmedzenie riadiacej veličiny bolo  $u = \langle -1 \ 1 \rangle$ . Hodnoty parametrov  $\alpha_i$  nechávame v tejto časti pre porovnanie rovnaké, ako v predošlom, t.j.  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = -3$ .



Obr. 5.9 Časové priebehy stavových a riadiacej veličiny zjednodušeného časovo-suboptimálneho regulátora

Na obr. 5.9 je možné si všimnúť všetky tri intervaly riadenia, kedy riadiaca veličina dosahuje obmedzenie. Na rozdiel od časovo-optimálneho riadenia prepínanie medzi jednotlivými medznými hodnotami nie je skokové, ale tento prechod sa uskutočňuje spojito s rýchlosťou danou jednotlivými parametrami  $\alpha_i$ .

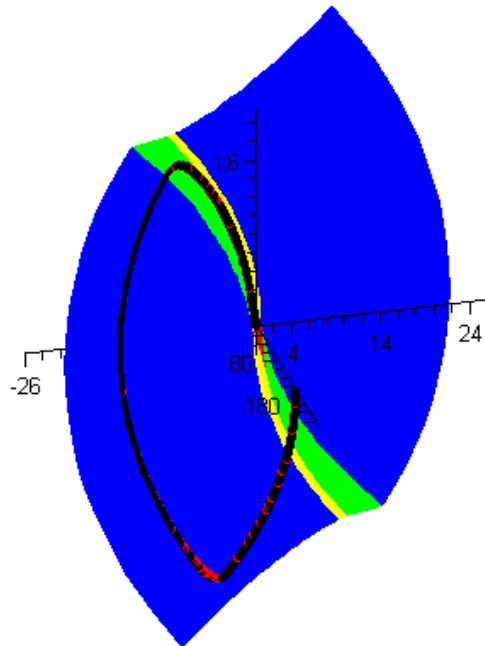
## 5.7 Porovnanie algoritmov riadenia

V tejto časti porovnáme odvodené algoritmy riadenia (5.33) a (5.10) navzájom a ďalej porovnáme zjednodušený algoritmus (5.33) s prediktívnym regulátorom.

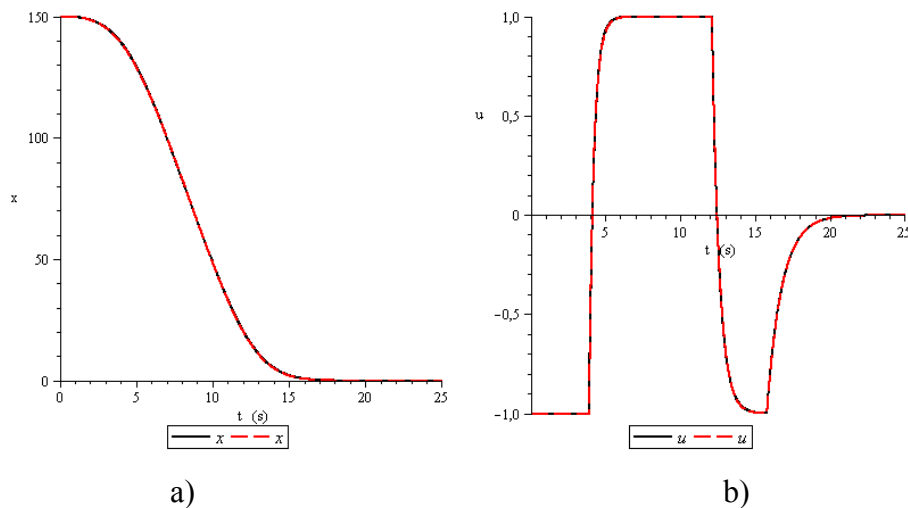
### 5.7.1 Porovnanie navrhnutých algoritmov navzájom

Algoritmus (5.33) predstavuje zjednodušenú formu algoritmu (5.10). Jeho podstatnou výhodou je analytické vyjadrenie riadiacej veličiny pre jednotlivé segmenty a tiež možnosť rýchlej lokalizácie aktuálneho stavu do prislúchajúceho segmentu pomocou vypočítaných parametrov  $q_i$ . Hodnoty parametrov  $\alpha_i$  sú  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = -3$ . Začiatočný stav zoberieme z predchádzajúcej časti  $\mathbf{x}_0 = [150 \ 0 \ 0]^T$ , pre ktorý sú prechodové deje so

zjednodušeným algoritmom (5.33) na obr. 5.9. Za účelom porovnania zobrazíme tieto údaje v prostredí Maple a vykonáme simulácie pre tento bod s nezjednodušeným algoritmom (5.10). Priebehy z oboch algoritmov sú na obr. 5.10 a 5.11 a sú takmer identické.



Obr. 5.10 Porovnanie fázových trajektórií pôvodného a zjednodušeného algoritmu pre začiatočný stav  $\mathbf{x}_0 = [150 \ 0 \ 0]^T$



Obr. 5.11 Porovnanie časových priebehov stavových (a) a riadiacich veličín (b) pre začiatočný stav  $\mathbf{x}_0 = [150 \ 0 \ 0]^T$

Záverom tejto časti môžeme skonštatovať, že zjednodušený algoritmus (5.33) je v plnej miere postačujúci ako náhrada pôvodného algoritmu (5.10) a z hľadiska jeho realizovateľnosti je vhodný aj pre systémy reálneho času. To nám umožňuje aplikovať zjednodušený algoritmus (5.33) aj na reálne systémy. Ak by sme totiž porovnávali dobu výpočtu, tak v algoritme (5.10) sa tento údaj pohybuje na úrovni sekúnd (v každom kroku je nutné riešiť niekoľko systémov nelineárnych rovníc), pričom pri zjednodušenom

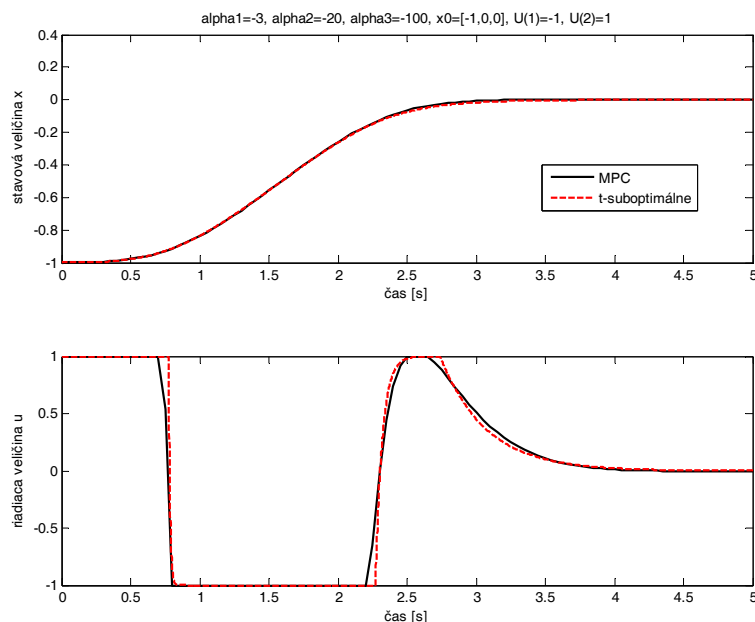
algoritme je to na úrovni milisekúnd (a to je pri programe v interpretovanom tvare, jeho kompiláciou by sa dosiahlo ďalšie zrýchlenie).

### 5.7.2 Porovnanie s prediktívnym regulátorom

V tejto časti porovnáme zjednodušený časovo-suboptimálny regulátor (5.33) s prediktívnym regulátorom typu MPC, ktorého návrh je prevzatý z literatúry (Glattfelder a Schaufelberger, 2003). Parametre MPC-regulátora boli nasledovné: horizont predikcie  $N = 50$ , perióda vzorkovania  $T_s = 0.05s$ , matica váh lineárneho kvadratického regulátora

$$Q = \begin{bmatrix} 11.78 & 0 & 0 \\ 0 & 3.345 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3175 \end{bmatrix}, \text{ prislúchajúca šírka pásma } \Omega = 3.25 \text{ pre } r = 0.01. \text{ Vyššie}$$

hodnoty  $\Omega$  vykazovali odozvy s preregulovaním. Parametre zjednodušeného časovo-suboptimálneho regulátora boli zvolené tak, aby sme dosiahli podobnú odozvu riadiacej veličiny ako s MPC-regulátorom. Parametre sú nasledovné:  $\alpha_1 = -3$ ,  $\alpha_2 = -20$ ,  $\alpha_3 = -100$ . Boli vykonané prechodové deje zo začiatočného stavu  $\mathbf{x} = [-1 \ 0 \ 0]^T$  do začiatku súradnicového systému, pričom obmedzenia akčnej veličiny boli  $u = \langle -1 \ 1 \rangle$ . Na obr. 5.12 je možné vidieť, že odozvy stavových veličín  $x$  sú pre oba regulátory takmer identické. V časových priebehoch riadiacich veličín možno pozorovať odlišnosti, ale pretože cieľom bolo naladiť parametre  $\alpha_i$  tak, aby priebehy riadiacich veličín boli podobné, rozdiely sú veľmi malé. Dokazuje to pružnosť časovo-suboptimálneho regulátora, ktorý dokáže prispôbiť rýchlosť zmien riadiacej veličiny požadovaným hodnotám.



Obr. 5.12 Porovnanie zjednodušeného časovo-suboptimálneho regulátora a MPC-regulátora s podobným priebehom

Záverom tejto nosnej časti práce môžeme konštatovať, že zjednodušený časovo-suboptimálny regulátor (5.33) je takmer identický s pôvodne navrhnutým algoritmom (5.10) a preto ho môže v praktických aplikáciách nahradiť v plnej miere.

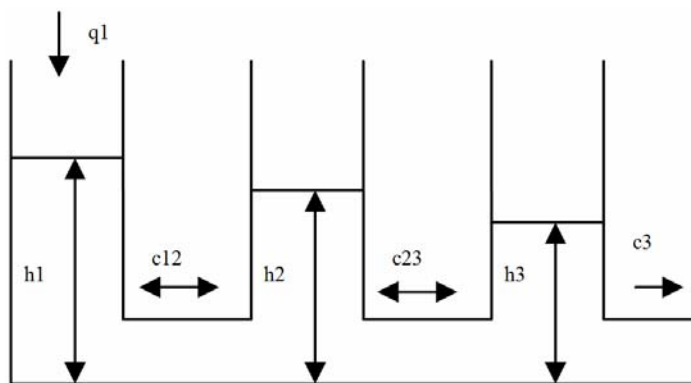
Nezanedbateľným faktorom je aj rýchlosť výpočtu zjednodušeného algoritmu, ktorá sa rádovo líši od pôvodného algoritmu. Prechody medzi limitnými akčnými hodnotami možno vďaka parametrom  $\alpha_i$  nastavovať individuálne a tým dosiahnuť takmer ekvivalentné priebehy, ako napr. s MPC-regulátorom, čo bolo dokumentované posledným príkladom porovnania. Je tým zvýraznený flexibilný charakter zjednodušeného časovo-suboptimálneho riadenia.

## 6 Aplikácia na riadenie hydraulického systému

V tejto kapitole uplatníme navrhnuté algoritmy na riadenie hydraulického systému. Sústredíme sa pritom na systémy tretieho rádu. V zvolenom príklade bude reálny systém reprezentovaný nelineárnou hydraulickou sústavou s tromi prepojenými nádobami. Najskôr ukážeme jej opis v stavovom priestore. Na to, aby sme z pôvodne nelineárneho modelu hydraulického systému získali model s trojnásobným integrátorom, bola využitá metóda exaktnej linearizácie. Potom už mohol byť aplikovaný zjednodušený časovo-optimálny algoritmus riadenia opísaný v predchádzajúcej kapitole.

### 6.1 Opis hydraulického systému s tromi nádržami

Schematické znázornenie hydraulického systému s tromi nádržami je na obr. 6.1. Nádrže sú navzájom prepojené ventilmi, ktorých hydrostatický odpor je charakterizovaný konštantami  $c_{12}$  (medzi prvou a druhou nádobou) a  $c_{23}$  (medzi druhou a treťou nádobou). Posledná (tretia) nádrž má výpustný ventil, ktorý je charakterizovaný konštantou  $c_3$ . Čerpadlo privádza kvapalinu do prvej nádoby. Vstupná veličina je označená  $q_1$  a reprezentuje množstvo pritečenej vody za jednotku času [ $m^3 s^{-1}$ ]. Stavovými veličinami sú výšky hladín v jednotlivých nádobách [ $m$ ], ktoré sú označené  $h_1, h_2$  a  $h_3$ . Stavová veličina  $h_3$  zároveň predstavuje výstupnú veličinu, pričom cieľom riadenia bude dosiahnuť jej požadovanú hodnotu  $w$ . Konštanta  $A_1$  reprezentuje plochu podstavy jednej nádoby, pričom nádoby sú geometricky identické.



Obr. 6.1 Hydraulický systém s tromi prepojenými nádržami

Potom je možné hydraulický systém s tromi nádržami opísať nasledovným systémom nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{f}(\mathbf{h}) + \mathbf{g}(\mathbf{h})q_1, \quad y = h(\mathbf{h})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} -c_{12}\sqrt{h_1 - h_2} \\ c_{12}\sqrt{h_1 - h_2} - c_{23}\sqrt{h_2 - h_3} \\ c_{23}\sqrt{h_2 - h_3} - c_3\sqrt{h_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} 1 \\ A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = h_3 \quad (6.1)$$

Pre reálny hydraulický systém (obr. 6.2) boli identifikované nasledovné parametre

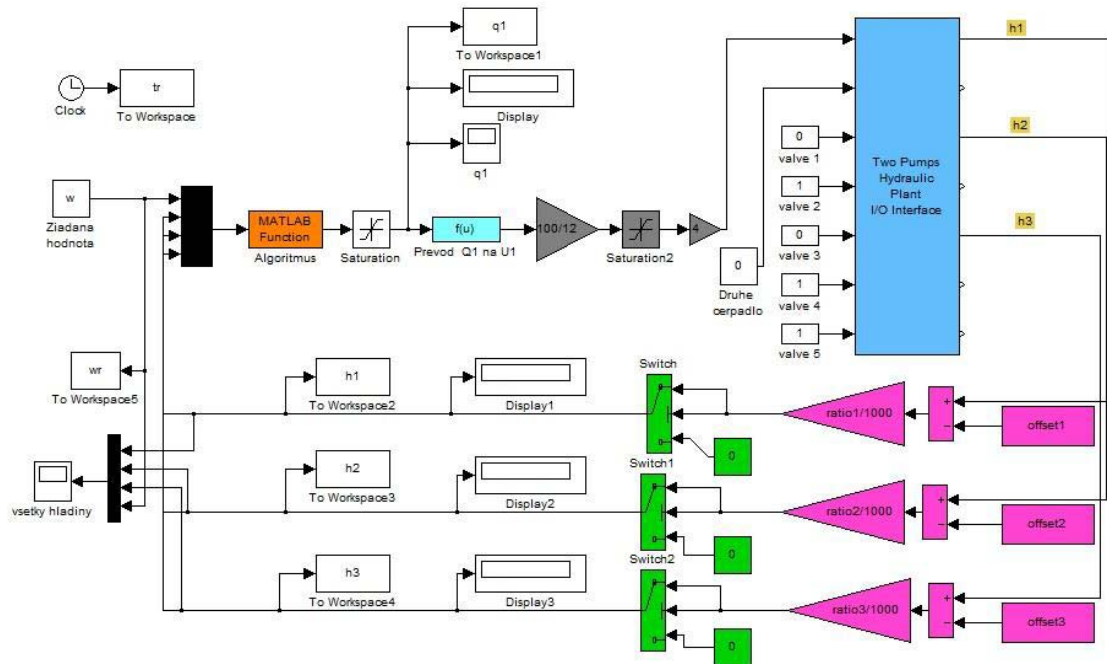
$$\begin{aligned} A_1 &= 0.001 \text{ m}^2 \\ c_{12} &= 0.0148 \text{ m}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1} \\ c_{23} &= 0.0152 \text{ m}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1} \\ c_3 &= 0.006 \text{ m}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (6.2)$$



Obr. 6.2 Reálny hydraulický systém

## 6.2 Časovo-suboptimálny regulátor aplikovaný na reálny hydraulický systém

Táto časť je venovaná experimentu na reálnom hydraulickom systéme s cieľom overiť realizovateľnosť navrhnutého časovo-suboptimálneho algoritmu (5.33) na systéme reálneho času. Reálny systém prináša so sebou množstvo premenlivých parametrov a ohraničení, ktoré pôvodný návrh algoritmu nebral do úvahy, a preto bude zaujímavé sledovať, aká je jeho odolnosť voči týmto javom. Je známe, že časovo optimálny algoritmus je veľmi citlivý na zmenu parametrov. V prípade suboptimálneho algoritmu máme k dispozícii parametre  $\alpha_i$ , ktoré nám umožňujú ovplyvňovať rýchlosť zmien riadiacej veličiny pri prechode z jednej medznej hodnoty na druhú, čo sa dá využiť na zníženie citlivosti na zmenu parametrov.



Obr. 6.3 Bloková schéma riadenia reálneho hydraulického systému

Na identifikáciu reálneho hydraulického systému boli použité skriptovacie súbory v Matlabe vytvorené v práci Kajan (2011). Bloková schéma riadenia (obr. 6.3) je modifikáciou blokovej schémy pochádzajúcej z toho istého zdroja, kde bola táto využitá pre riadenie hydraulického systému pomocou lineárnych regulátorov.

V blokovej schéme vidno samotný hydraulický systém (modrou farbou), blok riadenia realizovaný prostredníctvom bloku Matlab Function (oranžovou farbou), obmedzenie (blok Saturation) a množstvo ďalších blokov realizujúcich vstup signálov, ich prevod resp. vizualizáciu. Zdrojom najviac premenlivých parametrov boli bloky zodpovedajúce snímačom (vyznačené fialovou farbou), ktoré bolo treba pred každým experimentom kalibrovať (identifikovať parametre *ratio* a *offset*). Zdrojom ďalšej nelinearity (okrem saturácie) bola nelineárna prevodová charakteristika čerpadla uložená v bloku *f(u)* (bledomodrou farbou).

Riadenie reálneho systému bolo realizované s periódou vzorkovania  $T_s = 250\text{ms}$ , čo vzhľadom k veľkým časovým konštantám hydraulického systému možno považovať za spojité riadenie. Žiadaná hodnota výšky tretej hladiny bola na úrovni  $w = 0.07\text{m}$ , čo bolo dosiahnuteľné s ohľadom na výkon čerpadla a nastavenia ventilov. Ostatné parametre pochádzajúce z identifikácie hydraulického systému sú uvedené nižšie. Ide o parametre modelu samotného hydraulického systému (6.2). Ďalej sú to parametre snímačov vychádzajúce z ich kalibrácie

$$\begin{aligned}
 \text{offset1} &= 470 & \text{ratio1} &= 0.418 \\
 \text{offset2} &= 199 & \text{ratio2} &= 0.490 \\
 \text{offset3} &= 220 & \text{ratio3} &= 0.448
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

A nakoniec parametre inverznej nelineárnej prevodovej charakteristiky čerpadla, ktorá tvorí polynóm štvrtého rádu zabezpečujúci prevod z prítoku  $q_1$  (ktorý je výstupom z algoritmu) na napätie čerpadla  $U1$ .

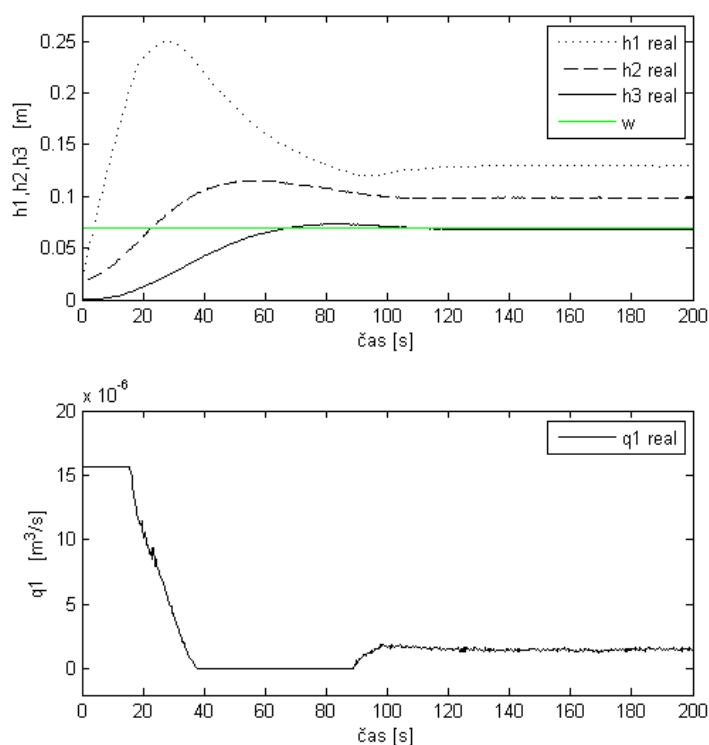
$$U1 = 4.8006e + 020 * q1^4 - 8.2889e + 015 * q1^3 + 4.7526e + 010 * q1^2 + 1.1894e + 005 * q1 + 1.8315 \quad (6.4)$$

Obmedzenie riadiacej veličiny, reprezentujúcej prítok kvapaliny do prvej nádoby, bolo

$$q_1 \in \langle Q_{\min}, Q_{\max} \rangle, \quad Q_{\min} = 0, \quad Q_{\max} = 1.562 \cdot 10^{-5} [m^3 s^{-1}] \quad (6.5)$$

Na obr. 6.4 sú uvedené časové priebehy reálneho hydraulického systému riadeného zjednodušeným časovo-suboptimálnym regulátorom (5.33), pričom parametre  $\alpha_i$  boli zvolené

$$\alpha_1 = -0.1, \quad \alpha_2 = -0.15, \quad \alpha_3 = -0.1 \quad (6.6)$$



Obr. 6.4 Časové priebehy riadenia reálneho hydraulického systému pomocou zjednodušeného časovo-suboptimálneho regulátora

Z časových priebehov stavových veličín vidno, že výstupná veličina  $y = h_3$  nadobúda malé prerogulovanie a pri podrobnejšom pohľade by sme zistili, že v riadiacom obvode existuje malá trvalá regulačná odchýlka. Je to dôsledkom nepresnosti matematického modelu hydraulického systému a najmä toho, že navrhnutý algoritmus riadenia (5.33) neobsahuje integračnú zložku, ktorá by vedela potlačiť trvalú regulačnú odchýlku. Na našom pracovisku boli vyvinuté viaceré štruktúry rekonštrukcie poruchy, ktoré možno dodatočne do riadiaceho obvodu implementovať a tým zaviesť integračnú zložku. Toto však už nebolo predmetom skúmania tejto práce. Navrhnutý algoritmus riadenia (5.33) má skôr

proporcionálne-derivačný charakter (typ PDD<sup>2</sup>-regulátora), pretože doň vstupuje výstup a jeho derivácie. Je zameraný na dynamiku prechodových dejov, pričom jeho úlohou je dosiahnuť rýchle odozvy.

Z priebehu riadiacej veličiny je zrejmé, že dosahuje iba dva intervaly riadenia, kedy je na obmedzení. Voľbou rýchlejších parametrov  $\alpha_i$  sme sa snažili dosiahnuť aj tretí interval riadenia, ale nevýhodou bol veľký šum riadiacej veličiny, ktorý táto dosahovala v ustálenom stave (pri parametroch  $\alpha_1 = -0.2$ ,  $\alpha_2 = -0.25$ ,  $\alpha_3 = -0.2$  to bolo približne dvadsať percent z rozsahu obmedzení), pričom tretí interval aj tak nedosiahol obmedzenie. Strácanie sa tretieho intervalu riadenia je však typickým prejavom riadenia stabilných systémov. Je to aj dané tým, že reálny hydraulický systém sa značne líši od ideálneho modelu trojnásobného integrátora a nezaoberali sme sa podrobnejšie dôsledkami narušenia kompenzácie nelinearít počas obmedzenia akčnej veličiny. Navyše pri rýchlejších parametroch  $\alpha_i$  sa v riadiacom obvode prejavilo ďalšie podstatné obmedzenie a to obmedzenie výšky hladiny  $h_1$  dané fyzickou výškou nádoby, čo návrh algoritmu riadenia tiež nezohľadňoval.

Záverom tejto časti možno konštatovať, že realizovaný experiment dostatočne preukázal, že navrhnutý algoritmus je realizovateľný v praxi. Pre zvýraznenie jeho kvalít by bolo potrebné aplikovať ho na systém, ktorého dynamika presnejšie zodpovedá modelu trojnásobného integrátora. Takýto reálny systém však v čase vypracovania tejto práce nebol na našom pracovisku dostupný.

## 7 Zhodnotenie a diskusia

V tejto kapitole podrobne zhodnotíme výsledky práce a zaujmeme k nim stanovisko. Ďalej stručne zhrnieme prínosy práce a načrtujeme perspektívy ďalšieho vývoja.

### 7.1 Výsledky práce

Hlavným cieľom práce bolo navrhnuť časovo-suboptimálny regulátor pre systém trojnásobného integrátora, pričom tento regulátor mal rešpektovať obmedzenia akčnej veličiny. Za týmto účelom bola v práci podrobne rozpracovaná metóda nelineárnej dekompozície dynamiky. Dôraz bol kladený na geometrickú interpretáciu návrhu riadenia. Preto bol tento návrh sprevádzaný aj návrhom lineárneho riadenia so zadávaním pólov, pričom bolo poukázané na to, že princíp znižovania orientovanej vzdialenosti od referenčných geometrických objektov je možné uplatniť v prípade lineárneho aj nelineárneho riadenia. Kapitola venovaná nelineárnej dekompozícii dynamiky vyjadruje postupne referenčné geometrické objekty od jednorozmerných k viacrozmerným tak, že postupuje späť v čase. Jej vyústením je elegantné vyjadrenie n-rozmerného stavového priestoru vo forme súčtu jednotlivých subsystémov (4.3). Toto však predstavuje vo všeobecnosti systém nelineárnych algebrických rovníc, ktorého riešením sú jednotlivé zložky výsledného riadiaceho zásahu. Problémom je nájdenie analytického riešenia zostaveného systému nelineárnych rovníc. Prvky fundamentálnej matice a ich integrácia môžu byť pre rôzne systémy zdrojom rôznych nelineárnych funkcií, ktoré spôsobujú neexistenciu analytického riešenia už pri niektorých systémoch druhého rádu. Podobne nebolo možné vyjadriť ani exaktné riešenie v prípade trojnásobného integrátora. Riešenie systému (4.3) dáva zložky časovo-suboptimálneho regulátora. Ak by sme do systému (4.3) dosadili fundamentálnu maticu systému a vlastné vektory zodpovedajúce parametrom  $\alpha_i$  a následne vypočítali limitu pre  $\alpha_i$  idúce do  $-\infty$ , dostali by sme systém, ktorého riešením



by bol časovo-optimálny regulátor. Získať analytické riešenie je aj v tomto prípade problém. Vo všeobecnosti zostáva možnosť využiť numerické riešenia na ohraničenom intervale hodnôt, čo však pri praktickej realizácii naráža na problém rýchlosti ich konvergencie.

Hlavný cieľ práce je realizovaný v kapitole venovanej syntéze regulátorov s obmedzeniami pre systémy 3. rádu, kedy je riadeným systémom trojnásobný integrátor. Pri návrhu nelineárneho časovo-suboptimálneho regulátora sa uplatňujú všeobecné odvodenia z kapitoly o nelineárnej dekompozícii dynamiky. Výsledkom je algoritmus (5.10), ktorý však neponúka výpočet riadiaceho zásahu v analytickom tvare. Namiesto toho je neustále potrebné riešiť systém troch nelineárnych rovníc a vyhodnocovať, ktoré riešenie vyhovuje obmedzujúcim podmienkam. Ako už bolo vyššie spomenuté, to môže byť limitujúce vzhľadom na praktické využitie v systémoch reálneho času.

Za účelom získania algoritmu, ktorý by bol realizovateľný v praxi, bolo v ďalšom postupe zavedené zjednodušenie v podobe merania orientovanej vzdialenosti v smere osi  $x$ . To vyústilo v odvodenie analytických vzťahov pre riadiacu veličinu a tiež podmienok na lokalizáciu stavu využitých v algoritme riadenia (5.33). Rýchlosť takéhoto algoritmu bola rádovo vyššia ako algoritmu (5.10). Algoritmus (5.33) bol realizovaný ako m-súbor v Matlab-e a v interpretovanom stave rýchlosť jeho vyhodnotenia bola kratšia ako 1ms. Naproti tomu algoritmus (5.10) bol realizovaný v programe Maple, pričom tu sa rýchlosť jeho vyhodnotenia pohybovala na úrovni niekoľkých sekúnd. Pritom z porovnania časových priebehov oboch algoritmov vyplynulo, že sú takmer identické. Rozdiely v grafickom zobrazení priebehov neboli badateľné a až porovnávaním numerických hodnôt sa dali pozorovať malé odchýlky. Z odlišného princípu návrhu oboch algoritmov prejavujúceho sa v treťom subsystéme  $x_3$ , je však zrejmé, že rozdiely, aj keď nepatrné, sa musia vyskytnúť vo všetkých prechodových dejoch, pri ktorých fázové trajektórie prechádzajú pásom proporcionálneho riadenia.

Odvodenie zjednodušeného časovo-suboptimálneho algoritmu (5.33) a jeho implementácia v Matlab-e umožnili, aby bol aplikovaný aj na iné typové systémy, ba dokonca na nelineárny hydraulický systém. Ďalšou výhodou zjednodušeného algoritmu je voľba parametrov  $\alpha_i$  a ich zostupné radenie. Hoci prvé dva parametre  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  musia spĺňať podmienku zostupného radenia, pretože určujú referenčnú brzdnú plochu, ktorá je identická s algoritmom (5.10), tretí parameter  $\alpha_3$  túto podmienku spĺňať nemusí, pretože v rozklade bol tretí vlastný vektor  $v_3$  nahradený vektorom  $v_x$  rovnobežným s osou  $x$ . To nám umožňuje voliť  $\alpha_3$  ako ľubovoľnú zápornú hodnotu a týmto spôsobom nezávisle ovplyvňovať rýchlosť zmeny medzných hodnôt pri prechode zo začiatočného intervalu na stredný interval riadenia. Možnosť ovplyvňovať rýchlosť zmien medzi jednotlivými intervalmi riadenia individuálne sa ukázala ako jedna z výhod pri porovnaní s regulátorom typu MPC.

Dôkazom realizovateľnosti zjednodušeného časovo-suboptimálneho algoritmu pre systémy reálneho času bola jeho aplikácia na reálny hydraulický systém. Zvolili sme systém s tromi nádržami, ktorý bol rádovo zhodný so systémom trojnásobného integrátora, pre ktorý bol algoritmus riadenia pôvodne odvodený. Vďaka nelineárnym spätným väzbám reprezentovaným odmocninovými závislosťami z rozdielu výšok susedných hladín sa dynamika hydraulického systému značne líši od dynamiky modelu čistého trojnásobného integrátora. V dôsledku toho sme nemohli mať príliš veľké očakávania, čo sa týka kvality regulácie, ale na overenie realizovateľnosti regulátora na reálnom systéme tretieho rádu,

ktorý bol na pracovisku k dispozícii, to postačovalo. Metódou exaktnej linearizácie sme previedli pôvodne nelineárny systém na systém trojnásobného integrátora, ktorý časovo-suboptimálny algoritmus vyžaduje. Dôsledkom takéhoto prevodu bola však určitá spotreba z rozsahu akčnej veličiny na exaktnú linearizáciu, ktorá bola premenlivá v závislosti na aktuálnom stave. Časovo-suboptimálny algoritmus nemal teda k dispozícii pevne dané obmedzenia akčnej veličiny, ale tieto bolo potrebné neustále transformovať podľa aktuálnej linearizačnej spätnej väzby. Často krát nestačil ani celý akčný rozsah na samotnú exaktnú linearizáciu. Vtedy už časovo-suboptimálny algoritmus nemal príležitosť uplatniť sa a riadenie nadobúdalo jednu z medných hodnôt. Napriek tomu môžeme sledovať v priebehu akčnej veličiny jednotlivé intervaly riadenia zodpovedajúce časovo-suboptimálnemu riadeniu. Kratšie prechodové deje však boli dosiahnuté pri dvoch intervaloch riadenia, ktoré zodpovedali pomalším parametrom  $\alpha_i$ . Vysvetľujeme to značnou odlišnosťou reálneho hydraulického systému od modelu trojnásobného integrátora. Napriek tomu kvalita prechodových dejov je uspokojivá a porovnateľná napr. so štandardným lineárnym regulátorom so zadávaním pólov, ktorý dosahuje síce o trocha dlhšiu dobu regulácie, ale na druhej strane jeho riadiaca veličina je menej zašumená. Možno očakávať, že prínos nového riešenia sa prejaví hlavne pri riadení integrálnych a nestabilných sústav tretieho rádu, kde z princípu inverznej dynamiky vyplýva potreba troch intervalov riadenia.

## 7.2 Prínosy práce

K najdôležitejším prínosom práce patrí

- rozšírenie metódy nelineárnej dekompozície dynamiky na všeobecné lineárne systémy  $n$ -tého rádu s obmedzeniami akčnej veličiny
- odvodenie časovo-suboptimálnych riadiacich algoritmov pre systémy 2. a 3. rádu rešpektujúcich obmedzenia akčnej veličiny, pričom tieto algoritmy využívajú exaktne metódu nelineárnej dekompozície dynamiky
- zjednodušenie riadiacich algoritmov časovo-suboptimálnych regulátorov založené na geometrickej interpretácii riadenia so zadávaním pólov a merania vzdialenosti v poslednom subsysteme ( $\mathbf{x}_2$  resp.  $\mathbf{x}_3$ ) v smere osi  $x$ .
- porovnanie oboch algoritmov časovo-suboptimálneho riadenia navzájom a porovnanie zjednodušeného časovo-suboptimálneho riadenia s inými štandardnými metódami
- aplikácia zjednodušeného časovo-suboptimálneho riadenia na reálny hydraulický systém, čím bola preukázaná jeho praktická realizácia pre systémy reálneho času

## 7.3 Perspektívy vývoja

Navrhnuté časovo-suboptimálne algoritmy riadenia sa v blízkej budúcnosti môžu stať základom pre širšie riadiace štruktúry. Pre priemyselnú realizáciu budú však vyžadovať ďalšie zjednodušenia a úpravy týkajúce sa ošetrenia možných chýb, ktoré môžu pri výpočte algoritmu nastať. Je však dôležité, že pre riadenie boli odvodené presné analytické vzťahy. Tieto je možné aproximovať s požadovanou presnosťou a získať tak ďalšie zjednodušenia vyhovujúce požiadavkám priemyselnej praxe.

Ako bolo vidno z reálnych priebehov, navrhnuté časovo-suboptimálne riadenie nedokáže potlačiť trvalú regulačnú výchylku. Spôsobuje to chýbajúca I-zložka v navrhnutom regulátore. Charakter časovo-suboptimálneho riadenia je totiž len proporcionálno-

derivačný. Na našom pracovisku sú vyvíjané riadiace štruktúry, ktoré umožňujú do riadiaceho obvodu dodatočne implementovať kompenzáciu porúch, čím riadiaci obvod nadobúda aj integračný charakter (Huba, 2011).

Zaujímavou výzvou je aplikácia metódy nelineárnej dekompozície dynamiky na iné typové systémy, než akým je reťazec integrátorov. Z časovo-optimálnych regulátorov vieme, že určité komplikácie môžeme očakávať pri kmitavých systémoch a systémoch s dopravnými oneskoreniami. Ďalšou výzvou sú tiež systémy vyšších rádov, kde sa nemôžeme spoliehať na existenciu analytických riešení a dôležitú úlohu tu zohrávajú iteračné numerické algoritmy a rýchlosť ich konvergenzie.

## 8 Záver

Práca analyzuje problematiku riadenia s obmedzením akčnej veličiny a uvádza návrh nových riadiacich metód zameraných najmä na systémy tretieho rádu, menovite trojnásobný integrátor. Pri návrhu sa využíva dekompozícia dynamiky na jednotlivé módy, ktoré v lineárnom prípade zodpovedajú pólom uzavretého systému, pričom pre jednoduchosť predpokladáme, že póly sú navzájom rôzne. Potom bude spoločnou črtou riešení rovnaký koncept návrhu lineárnych systémov aj systémov s obmedzeniami – znižovanie vzdialenosti od najbližšej invariantnej množiny nižšieho rozmeru. S ohľadom na viaceré možnosti definovania vzdialenosti bodu od invariantnej množiny (plochy, krivky, bodu) existujú aj viaceré riešenia úlohy. Tie sa líšia hlavne zložitou realizáciou. Hlavným prínosom nového prístupu je (okrem jednotnej koncepcie lineárneho a nelineárneho riešenia) fakt, že nezavádza žiadne nové voliteľné parametre, ktoré by ďalej komplikovali výsledné riešenie. Tým sa líši od iných známych prístupov, ako napr. Glattfelder a Schaufelberger, (2003).

Spomedzi všetkých možných riešení sa práca v teoretickej rovine zameriava na špeciálny prípad merania vzdialenosti od  $(n-1)$ -rozmernej plochy v smere komplementárneho vlastného vektora  $\mathbf{v}_n$ , ktorý zodpovedá dekompozícii dynamiky akčnej veličiny na  $n$  obmedzených exponenciál. V konkrétnom prípade trojnásobného integrátora je potom takéto riadenie konfrontované s iným smerom merania vzdialenosti od referenčnej plochy a síce s meraním v smere osi  $x$ , čo umožňuje určité zjednodušenie riadiaceho algoritmu. Potom je možné lokalizovať stav systému vzhľadom na určitý segment referenčnej plochy a odvodiť vzťah pre riadenie v analytickom tvare. To umožňuje nasadiť výsledné riadenie aj v systémoch reálneho času.

Navrhnuté metódy boli teda vo všeobecnosti formulované pre riadenie systémov ľubovoľného rádu. Podobne, ako pri časovo optimálnom riadení, však existujú reálne analytické riešenia len pre systémy do 3. rádu. To však väčšinou plne vyhovuje požiadavkám praxe. Realizácie algoritmov riadenia vychádzajúce zo systémov 2. rádu a 3. rádu boli viacnásobne overené riadením v reálnom čase, pričom ich nesporným prínosom je, že oproti iným známym riešeniam (Bemporad a kol., 2002) umožňujú mnohonásobné urýchlenie výpočtov.

Podstatným rozdielom riešení s obmedzenou akčnou veličinou je tiež závislosť výslednej dynamiky na poradí pólov. Usporiadanie pólov totiž definujeme prípustnú rýchlosť zmien akčnej veličiny v jednotlivých fázach riadenia. Takéto nesymetrické obmedzenia sú však požadované v mnohých praktických aplikáciách, čo ďalej zvyšuje atraktivnosť odvodených riešení.

Práca úspešne rozvinula metódu nelineárnej dekompozície dynamiky na systémy  $n$ -tého rádu. Podstatná bola aplikácia tejto metódy na systém trojnásobného integrátora a zjednodušenie výsledného časovo-suboptimálneho algoritmu, čo umožnilo jeho praktickú realizáciu. Stanovené ciele práce tým boli splnené. Zjednodušený časovo-suboptimálny regulátor pre trojnásobný integrátor sa tak môže stať súčasťou nových riadiacich štruktúr, ktoré budú robustné a pritom dostatočne kvalitné.

## Zoznam použitej literatúry

- Ackermann, J. (1972). *Abtastregelung*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Bemporad, A., Morari, M., Dua, V. a Pistikopoulos, E.N. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38, 3-20.
- Bisták, P. a Huba, M. (2001). Time Suboptimal Pole Assignment Control via Relative Degree Reduction. In: CASYS. *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, roc.9, s. 189-203.
- Bisták, P. a Ľapák, P. (2005). Symbolic Computation of Constrained Controller. In: *15th Conference Process Control 2005*, Štrbské Pleso, s.214-1 - 214-6.
- Bisták, P., Ľapák, P. a Huba, M. (2006a). Constrained Pole Assignment Control of Double and Triple Integrator. In: *International Journal of Computing Anticipatory Systems*. - ISSN 1373-5411. - Vol. 18 , s. 34-49.
- Bisták, P., Ľapák, P. a Huba, M. (2006b). Synthesis of Constrained Controller in Computer Algebra System In: *International Journal of Computing Anticipatory Systems*. - ISSN 1373-5411. - Vol. 18, s. 50-60.
- Bisták, P. (2010). Time Optimal Control Using Gröbner Bases. In: *Kybernetika a informatika 2010, SSKI SAV International Conference*, Vyšná Boca, Slovakia.
- Bisták, P. (2011b). The Sub-Optimal Controller for Triple Integrator Applied to three-Level Hydraulic System. In: *Control and Applications : Proceedings of 13th IASTED Interantional Conference*. Vancouver, Canada. - ACTA Press, - s. 28-35.
- Bisták, P. (2011c). Time Sub-Optimal Control of Triple Integrator. ([www.kirp.chtf.stuba.sk/pc11/data/abstracts/076.html](http://www.kirp.chtf.stuba.sk/pc11/data/abstracts/076.html)) In: *Process Control 2011 : Proceedings of the 18th International Conference*. Tatranská Lomnica, Slovakia. - Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2011. - ISBN 978-80-227-3517-9. - s. 312-318
- Bisták, P. (2012). Application of Time Sub-Optimal Control to Hydraulic System. In: *Kybernetika a informatika 2012 : Zborník abstraktov. Medzinárodná konferencia SSKI a FEI STU. Skalka pri Kremnici*. - Bratislava : Vydavateľstvo STU, 2012. - ISBN 978-80-227-3642-8. - s. 73-74
- Blanchini, F. (1999). Set invariance in control – a survey. *Automatica*, 35 (11), 1747-1767.
- Borelli, F. (2003). *Constrained optimal control of linear and hybrid systems*. Springer.
- Föllinger, O. (1994). *Optimale Regelung und Steuerung*. Oldenbourg Verlag.
- Fliess, M., L'evine, J., Martin, P. a Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6), 1327–1361.
- Glatfelder, A.H. a Schaufelberger, W. (2003). *Control Systems with Input and Output Constraints*. Springer, London 2003.
- Gomes da Silva, Jr.J.M. a Tarbouriech, S. (1999). Polyhedral regions of local asymptotic stability for discrete-time linear systems with saturating controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(11), 2081-2085.
- Goodwin, G. C., Seron, M. M. a De Doná, J. A. (2005). *Constrained Control and Estimation, An Optimisation Approach*. Springer London.
- Hennet, J.C. a Béziat, J.P. (1991). A class of invariant regulators for the discrete-time linear constrained regulation problem. *Automatica*, 27(3), 549-554.

- Henrion, D., Tarbouriech, S. a V. Kučera (2001). Control of linear systems subject to input constraints: a polynomial approach. *Automatica* 37, 597-604.
- Hippe, P. (2003). A new widup prevention scheme for unstable systems. *IFAC Conference Control Systems Design*, Bratislava.
- Huba, M. (1994). Saturating Pole Assignment Controller. Construction and Geometrical Interpretation in the Phase Plane. *Preprints 1st IFAC Workshop "New Trends in Design of Control Systems"* Smolenice, 121-126.
- Huba, M. a Bisták, P. (1995). Saturating Control Algorithms for Some Typical Motion Control Tasks. In: *Proceedings of the IFAC Workshop "Motion Control"*, October 9-11, München, 157-164.
- Huba, M., Kulha, P., Bisták, P. a Skachová, Z. (1997). Two Dynamical Classes of PI-Controllers for the 1st Order Loops. *2nd IFAC Workshop New Trends in Design of Control Systems*, Smolenice, 293-298.
- Huba, M. (1998). Minimum Time Pole Assignment PD-controller for Linear 2nd Order Systems with Constrained Input. In: *Preprints IFAC Conf. SSC'98*, Nantes, 481-486.
- Huba, M. a Bisták, P. (1998). Minimum Time Pole Assignment Controllers for I2 Plant. In: *Preprints Int. Summer School „Real Time Control“*, CTU Prague, 59-69.
- Huba, M. a Bisták, P. (1999). Dynamic Classes in the PID Control. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego: AACC.
- Huba, M. (2003c). *Syntéza systémov s obmedzeniami 1*. Vydavateľstvo STU Bratislava, 341 s., ISBN 80-227-1944-7.
- Huba, M. (2005). P-und PD-Polvorgaberegler für Regelstrecken mit begrenzter Stellgröße. In: *at-Automatisierungstechnik* 53 (2005) 6, Oldenbourg Verlag, s.273-283.
- Huba, M. a Bisták, P. (2005). Design of constrained controllers using nonlinear dynamics decomposition. In: *Medzinárodná konf. Kybernetika a informatika*, 9.-11.2.2005, Dolný Kubín, s. 334-343.
- Huba, M. a Bisták, P. (2011). Minimum Time PD-Controller Design for 2nd Order Plants. In: *Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control*. Preprints. - Bratislava : STU v Bratislave. - ISBN 978-80-968627-2-6. - s. 227-234.
- Kabát, M. (2000). Návrh časovo optimálneho riadenia so zadávaním pólov dekompozíciou. *Práca ku dizertačnej skúške*, KAR FEI STU Bratislava.
- Kajan, M. (2011). Riadenie hydraulickej trojhladinovej sústavy. *Bakalárska práca*, ÚRPI FEI STU Bratislava.
- Kiendl, H. a G. Schneider (1972). Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke  $\text{const}/s^2$  aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. *at* 20, 289-296.
- Pavlov, A.A. (1966). Sintez relejnych sistem optimal'nych po bystrodejstviju. *Nauka* Moskva.
- Schneider, G. (1971). Eine suboptimale Methode zur Synthese von Abtastsystemen mit beschränkter Stellgröße. *Regelungstechnik* 19, č.8, 322-338.
- Smith, O.J.M. (1958). *Feedback control systems*. McGraw-Hill, New York.
- Ťapák, P., Huba, M. a Bisták, P. (2006). Control for Triple Integrator with Constrained Input. *Proc. 14th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ancona, Italy.
- Walther, U., Georgiou, T. T. a Tannenbaum, A. (2001). On the Computation of Switching Surfaces in Optimal Control: A Gröbner Basis Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 4.
- Žilka, V., Bisták, P. a Kurčík, P. (2008). Hydraulic Plant Remote Laboratory. In: *International Journal of Online Engineering*. - ISSN 1861-2121. - Vol. 4, Special Issue.
- Žilka, V. a Huba, M. (2011). Constrained PID Control Tasks for Coupled Tanks Control. In: *Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control*. Workbook. - Bratislava: STU v Bratislave, ISBN 978-80-968627-3-3. - S. 247-274.

## Publikované práce autora

### Vedecké práce v zahraničných nekarentovaných časopisoch

Bisták, Pavol - Folvarčík, Pavol: Remote Laboratory Java Server Based on JACOB Project. In: International Journal of Online Engineering. - ISSN 1861-2121. - Vol. 7, No. 1 (2011), s. 33-36.

Žilka, Vladimír - Bisták, Pavol - Kurčík, Peter: Hydraulic Plant Remote Laboratory. In: International Journal of Online Engineering. - ISSN 1861-2121. - Vol. 4, Special Issue (2008).

Bisták, Pavol - Ľapák, Peter - Huba, Mikuláš: Constrained Pole Assignment Control of Double and Triple Integrator. In: International Journal of Computing Anticipatory Systems. - ISSN 1373-5411. - Vol. 18 (2006), s. 34-49.

Bisták, Pavol - Ľapák, Peter - Huba, Mikuláš: Synthesis of Constrained Controller in Computer Algebra System. In: International Journal of Computing Anticipatory Systems. - ISSN 1373-5411. - Vol. 18 (2006), s. 50-60.

Bisták, Pavol., Huba, Mikuláš : Time Suboptimal Pole Assignment Control via Relative Degree Reduction. In: CASYS. International Journal of Computing Anticipatory Systems, roc.9, 2001, s. 189-203.

### Vedecké práce v domácich recenzovaných vedeckých zborníkoch, monografiách

Bisták, Pavol: Remote Laboratory Software Module for Thermo Optical Plant. In: Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control. Workbook. - Bratislava : STU v Bratislave, 2011. - ISBN 978-80-968627-3-3. - S. 275-290.

Bisták, Pavol: Time Sub-Optimal Control of Three-Level Hydraulic System. In: Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control. Preprints. - Bratislava : STU v Bratislave, 2011. - ISBN 978-80-968627-2-6. - S. 175-183.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol: Piecewise Linear PD-Controller Design for Constrained Systems. In: Selected Topics in Modelling and Control Vol. 4. - Bratislava : STU v Bratislave, 2004. - s. 60-65.

### Publikované príspevky na významnejších zahraničných vedeckých konferenciách

Bisták, Pavol: Mobile Client for Thermo Optical Remote Laboratory. In: ICL 2012 : 15th International Conference on Interactive Collaborative Learning. Villach, Austria, 26. – 28.9.2012. - Piscataway : IEEE, 2011. - ISBN:978-1-4673-2426-7.

Bisták, Pavol: Enhanced Three-Level Hydraulic Remote Laboratory. In: ICL 2012 : 15th International Conference on Interactive Collaborative Learning. Villach, Austria, 26. – 28.9.2012. - Piscataway : IEEE, 2011. - ISBN:978-1-4673-2426-7.

Bisták, Pavol: The Sub-Optimal Controller for Triple Integrator Applied to three-Level Hydraulic System. In: Control and Applications : Proceedings of 13th IASTED International Conference. Vancouver, Canada, June 1-3, 2011. - : ACTA Press, 2011. - S. 28-35.

Bisták, Pavol: 3D Visualization of Dynamical Systems for Learning Purposes. In: ICL 2010 : 13th International Conference on Interactive Computer Aided Learning. Hasselt, Belgium, 15.-17.9.2010. - : Kassel university press, 2010. - S. 716-722.

Bisták, Pavol: Remote Laboratory Java Server Based on JACOB Project. In: ICL 2010 : 13th International Conference on Interactive Computer Aided Learning. Hasselt, Belgium, 15.-17.9.2010. - : Kassel university press, 2010. - S. 964-969.

Bisták, Pavol: Matlab and Java Based Virtual and Remote Laboratories for Control Engineering. In: 17th Mediterranean Conference on Control and Automation : Thessaloniki, Greece, 24.-26.6.2009. - Piscataway : IEEE, 2009. - ISBN 978-1-4244-4685-8. - S. 1439-1444.

Bisták, Pavol - Ľapák, Peter: Controller Design Using Combination of Symbolic and Numeric Calculations in Maple. In: Modelling & Applied Simulation : 7th International Workshop. Amantea, Italy, 17.-19.9.2008. - Rende, 2008. - S. 204-209.

Ľapák, Peter - Bisták, Pavol - Huba, Mikuláš: Control for Triple Integrator with Constrained Input. In: 14th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2006 : Ancona, Italy, 28.-30.6.2006. - Piscataway : IEEE, 2006. - CD-Rom.

Bisták, Pavol - Ľapák, Peter - Huba, Mikuláš: Constrained Controller Based on Dynamics Decomposition. In: 14. steierisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung : SSRP 2005. Leibnitz, Austria, 19.-22.9.2005. - Graz : Technische Universität, 2005. - S. 141-152.

Bisták, Pavol - Źáková, Katarína: Organising Tele-Experiments for Control Education. In: MED '03 : 11th Mediterranean Conference on Control and Automation, Rhodes, Greece, 18.-20.6.2003. - Piscataway : IEEE, 2003. - nestr.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol: Constrained Controllers Based on the Dynamics Decomposition. In: REDISCOVER 2004 : Workshop on research and education in control and signal processing. Cavtat, Croatia, 14.-16.6.2004. - Zagreb : University of Zagreb, 2004. - nestr.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol - Źáková, Katarína: Remote Experiments in Control. In: The 1st IFAC symposium on telematics applications in automation and robotics : TA'04 Preprints. Helsinki, Finland, 21.-23.6.2004. - Laxenburg : IFAC, 2004. - S. 161-166.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol: Dynamic Classes in the PID Control. In: Proceedings of the 1999 American Control Conference. San Diego : AACC, 1999, s. 3868-3872.

## **Publikované príspevky na vybraných domácich vedeckých konferenciách**

Bisták, Pavol: Application of Time Sub-Optimal Control to Hydraulic System. In: Kybernetika a informatika 2012 : Zborník abstraktov. Medzinárodná konferencia SSKI a FEI STU. Skalka pri Kremnici, 31. január - 4. február 2012. - Bratislava : Vydavateľstvo STU, 2012. - ISBN 978-80-227-3642-8. - S. 73-74

Bisták, Pavol: Remote Laboratory Server Based on Java Matlab Interface. In: ICL 2011 [elektronický zdroj] : 14th International Conference on Interactive Collaborative Learning and 11th International Conference Virtual University. Piešťany, Slovakia, September 21-23, 2011. - Piscataway : IEEE, 2011. - ISBN 978-1-4577-1746-8. - S. 344-347

Bisták, Pavol: Time Sub-Optimal Control of Triple Integrator. ([www.kirp.chtf.stuba.sk/pc11/data/abstracts/076.html](http://www.kirp.chtf.stuba.sk/pc11/data/abstracts/076.html)). In: Process Control 2011 : Proceedings of the 18th International Conference. Tatranská Lomnica, Slovakia, 14.-17.6. 2011. - Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2011. - ISBN 978-80-227-3517-9. - S. 312-318

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol: Minimum Time PD-Controller Design for 2nd Order Plants. In: Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control. Preprints. - Bratislava : STU v Bratislave, 2011. - ISBN 978-80-968627-2-6. - S. 227-234.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol - Ľapák, Peter: Experiments & Control Engineering. In: ICETA 2010 : 8th International Conference on Emerging eLearning Technologies and Applications. Stará Lesná, Slovakia, 28.-29.10.2010. - Košice : Elfa, 2010. - ISBN 978-80-8086-166-7. - CD-Rom.

Bisták, Pavol: Time Optimal Control Using Gröbner Bases. In: Kybernetika a informatika 2010 : Medzinárodná konferencia SSKI SAV, Vyšná Boca, SR, 10.-13. 2. 2010. - Bratislava : Vydavateľstvo STU, 2010. - ISBN 978-80-227-3241-3. - CD-Rom

Bisták, Pavol - Ľapák, Peter: Saturated Control of Triple Integrator. In: 15th international conference on Process control '05 : Štrbské pleso, Slovenská republika, 7.-10.6.2005. - Bratislava : FCHPT STU, 2005. - ISBN 80-227-2235-9. - S. 203.

Bisták, Pavol - Ľapák, P.: Symbolic Computation of Constrained Controller. In: 15th international conference on Process control '05 : Štrbské pleso, Slovenská republika, 7.-10.6.2005. - Bratislava : FCHPT STU, 2005. - ISBN 80-227-2235-9. - S. 214.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol: Design of Constrained Controllers Using Nonlinear Dynamics Decomposition. In: Kybernetika a informatika 2005 : Zborník príspevkov; Medzinárodná konferencia organizovaná SSKI v spolupráci s STU FEI v Bratislave, Dolný Kubín. 9.- 11. Febr. 2005. - (Bratislava) : Slovak Society of Cybernetics and Informatics, 2005. - S. 334-343.

Huba, Mikuláš - Bisták, Pavol: Minimum Time PD-Controller. In: Control Systems Design. An Abstract Volume from the IFAC Conference : 2nd IFAC Conference `Control Systems Design 2003`, Bratislava, Slovak Republic, 7.-10.9.2003. - Bratislava : Slovak Society of Cybernetics and Informatics, 2004. - S. 65-70.