

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Ing. Róbert Málik

Autoreferát dizertačnej práce

Inovatívne metódy optimálneho riadenia

*na získanie akademického titulu
„doktor“ („philosophiae doctor“, v skratke „PhD.“)*

v doktorandskom študijnom programe: **robotika a kybernetika**

v študijnom odbore: **kybernetika**

forma štúdia: **denná**

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Dizertačná práca bola vypracovaná na
Ústave robotiky a kybernetiky FEI STU v Bratislave.

Predkladateľ: *Ing. Róbert Málík*

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Ústav robotiky a kybernetiky FEI STU
Ilkovičova 2961/3, 841 04 Bratislava

Školiteľ: *Ing. Marián Tárník, PhD.*

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Ústav robotiky a kybernetiky FEI STU
Ilkovičova 2961/3, 841 04 Bratislava

Oponenti: *doc. Ing. Libor Hargaš, PhD.*

Žilinská univerzita v Žiline
Fakulta elektrotechniky a informačných technológií
Katedra multimédií a informačno-komunikačných technológií
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

prof. Ing. Michal Kelemen, PhD.

Technická univerzita v Košiciach
Strojnícka fakulta
Ústav automatizácie, mechatroniky, robotiky a výrobnéj techniky
Park Komenského 8, 042 00 Košice

Autoreferát bol rozoslaný dňa:, obhajoba dizertačnej práce sa
bude konať dňa: **21.08.2025 o 10:30** na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU,
Ilkovičova 3, 841 04 Bratislava.

Abstrakt

Práca je zameraná na štúdium teórie optimalizácie a teórie optimálneho riadenia. Cieľom práce je navrhnúť možné inovácie a tým rozšíriť teóriu optimálneho riadenia. V práci sme vypracovali prehľad numerických algoritmov optimalizácie, prehľady lineárneho kvadratického riadenia (LQR) a prediktívneho riadenia (MPC), tieto algoritmy sme implementovali v programovacom jazyku Python. Algoritmy optimálneho riadenia sú citlivé na presnosť modelu, nemodelované dynamiky a externé poruchy. Na vytvorenie robustnejších zákonov riadenia sme zvolili riadenie v kľzavom režime (SMC), ktoré je schopné si poradiť s neurčitostami a poruchami. Z oblasti prediktívneho riadenia sme sa nakoniec zamerali na metódy tube-based MPC a offset-free MPC. Offset-free MPC dokáže odstrániť trvalé regulačné odchýlky aj v prípade nepresností medzi modelom a systémom alebo za pôsobenia externých konštantných porúch, má však horšie tlmiace vlastnosti pre harmonické poruchy. Tube-based MPC je robustná metóda prediktívneho riadenia, ktorá v sebe kombinuje nominálne MPC a robustný doplnkový zákon riadenia, ktorý sa stará o nonlinearity, poruchy a neurčitosti, ale nie vždy odstráni trvalé regulačné odchýlky. Navrhli sme kombináciu tube-based offset-free MPC s integrálnym kľzavým režimom s cieľom skombinovať pozitívne vlastnosti oboch metód. Experimenty ukázali zlepšenie v odstraňovaní trvalých regulačných odchýlok a tlmiačich vlastnostiach harmonických porúch. Vzniknuté navrhnuté riadenie je tak vylepšením samostatných metód tube-based a offset-free MPC. Čo sme preukázali v demonštračných experimentoch. Demonštračné experimenty sme vykonali aj pre ostatné vybrané algoritmy riadenia, na ktorých sme prezentovali ich vlastnosti. Použitelnosť riadenia na reálne systémy sme overovali meraním doby behu programu. Merania preukázali, že implementovaná metóda vnútorného bodu dokázala riešiť problém MPC online. Implementovanú metódu vnútorného bodu sme porovnali aj s externým optimalizačným Python modulom. Porovnanie preukázalo, že naša metóda bola rýchlejšia a spoľahlivejšia hlavne pri zväčšovaní horizontu predikcie. Na overenie sme vybrané metódy implementovali aj na reálne laboratórne systémy, na ktorých jednotlivé metódy dosiahli uspokojivé výsledky.

Kľúčové slová

optimalizácia, metóda vnútorného bodu, Kalmanov filter, optimálne riadenie, Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova rovnica, lineárne kvadratické riadenie, riadenie v kľzavom režime, integrálny kľzavý režim, prediktívne riadenie, tube-based prediktívne riadenie, offset-free prediktívne riadenie

Obsah

Úvod	6
1 Ciele práce	7
2 Optimalizácia	8
2.1 Karushove-Kuhnove-Tuckerove podmienky	8
2.2 Metóda vnútorného bodu	9
2.3 Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova (HJB) rovnica	12
3 Lineárny kvadratický regulátor (LQR)	14
3.1 LQR s pozorovateľom	14
3.2 LQR s integrálnym členom	16
3.3 Implementácia LQG s integrálnym členom na reálny systém	17
4 Riadenie v kľzavom režime (SMC)	19
4.1 Integrálny kľzavý režim (ISMC)	19
4.2 Integrálny kľzavý režim pre sledovanie trajektórie	20
5 Prediktívne riadenie (MPC)	22
5.1 Tube-Based MPC	22
5.2 Offset-free MPC	23
6 Tube-based offset-free MPC s integrálnym kľzavým režimom (ISMC)	25
6.1 Implementácia tube-based offset-free MPC s ISMC	26
Záver	31
Autorove publikácie	32

Úvod

V práci vytvoríme komplexný prehľad numerických metód používaných v oblasti optimálneho riadenia. Následne tieto metódy implementujeme a testujeme v prostredí vhodnom pre návrh algoritmov riadenia, najmä v jazyku Python.

Používame získané poznatky z teórie optimalizácie na implementáciu a analýzu metód optimálneho riadenia, konkrétne metód LQR, tube-based MPC a offset-free MPC. V týchto metódach zvolíme prístupy, ktoré umožnia riešiť problémy robustného riadenia a eliminovať trvalé regulačné odchýlky aj v prípade nepresností v modeli alebo pri výskyte externých porúch. Kombinácia tube-based offset-free MPC, navrhnutá v rámci tejto práce, má za cieľ spojiť výhody oboch prístupov a odstrániť ich individuálne nedostatky. Offset-free MPC dokáže odstrániť trvalé regulačné odchýlky aj v prípade nepresností medzi modelom a systémom alebo za pôsobenia externých konštantných porúch, má však horšie tlmiace vlastnosti pre harmonické poruchy. Tube-based MPC je lepšie v tlmení harmonických porúch, ale nie vždy odstráni trvalé regulačné odchýlky.

Tube-based MPC navrhujeme s doplnkovým robustným zákonom riadenia založeným na riadení v kľzavom režime. Tento zákon bude integrovaný do tube-based MPC na potlačenie neurčitostí, nelinearit, nemodelovanej dynamiky a externých porúch, čím sa vytvorí kombinovaný zákon riadenia.

Nakoniec experimentálne overíme navrhnuté algoritmy v simuláciách a aj na reálnych laboratórnych systémoch, s dôrazom na systémy s krátkou periódou vzorkovania. Meraná bude nielen kvalita riadenia, ale aj výpočtová náročnosť, s cieľom zhodnotiť ich praktickú implementovateľnosť. Súčasťou bude aj porovnanie vlastných implementovaných algoritmov numerickej optimalizácie s externými softvérovými balíkmi, a to najmä z hľadiska spoľahlivosti a rýchlosti výpočtu pri zväčšovaní horizontu predikcie.

1 Ciele práce

Cieľom tejto dizertačnej práce je výskum, návrh a implementácia inovatívnych metód optimálneho riadenia, so zameraním na prediktívne riadenie systémov za prítomnosti neurčitostí, porúch a obmedzení. Práca vychádza z poznatkov v oblasti lineárneho kvadratického riadenia (LQR), prediktívneho riadenia (MPC) a numerickej optimalizácie, pričom sa usiluje o rozšírenie existujúcich metód a návrh nových prístupov vhodných pre reálne aplikácie s dôrazom na robustnosť a výpočtovú efektívnosť.

1. Štúdia možných optimalizačných metód v oblasti optimálneho riadenia a následná implementácia týchto metód.
2. Štúdia v oblasti optimálneho riadenia so zameraním na lineárne kvadratické riadenie a prediktívne riadenie a implementácia vybraných algoritmov optimálneho riadenia (LQR, offset-free MPC, tube-based MPC).
3. Implementácia robustného doplnkového zákona riadenia v tube-based MPC formou riadenia v kľzavom režime, vypracovanie prehľadu algoritmov riadenia v kľzavom režime.
4. Návrh kombinácie offset-free MPC a tube-based MPC a zlepšenie tak tlmiacich vlastností pre offset-free MPC a presnosti sledovania pre tube-based MPC.
5. Overenie použiteľnosti navrhnutých algoritmov riadenia v reálnych systémoch s relatívne krátkou periódou vzorkovania.

2 Optimalizácia

V nasledujúcej kapitole predstavíme vybrané časti z teórie optimalizácie, ktoré sme používali pri riešení optimalizačných problémov vyskytujúcich sa v optimálnom riadení.

2.1 Karushove-Kuhnove-Tuckerove podmienky

Karushove-Kuhnove-Tuckerove (KKT) podmienky sú nutnými podmienkami existencie optima, nie však postačujúcimi. V prípade ale, že účelová funkcia je konvexná/konkávna, tiež sú konvexné a spojitě diferencovateľné aj obmedzenia typu nerovnosť a obmedzenia typu rovnosť sú afinné funkcie, tak sú zároveň aj postačujúcimi podmienkami [1–3]. Definujeme optimalizačný problém:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) \quad (2.1a)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.1c)$$

Definujeme Lagrangian:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

kde $\boldsymbol{\lambda}$ a $\boldsymbol{\mu}$ sú KKT multiplikátory. Ďalej $\mathbf{g}$ sú obmedzenia typu rovnosť a $\mathbf{h}$ sú obmedzenia typu nerovnosť:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_0(\mathbf{x}) \\ h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.3a)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (2.3b)$$

Samotné KKT podmienky optimality, ktoré potom musia byť splnené sú:

1. Podmienka stacionárnosti:

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad (2.4a)$$

2. Primárna prípustnosť:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad h_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.4b)$$

3. Duálna prípustnosť:

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \iff \mu_j \geq 0 \quad (2.4c)$$

4. Komplementarita:

$$\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \iff \mu_j h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4d)$$

2.2 Metóda vnútorného bodu

Metóda vnútorného bodu je numerická optimalizačná metóda, ktorá využíva fakt, že riešenie KKT podmienok s obmedzeniami typu rovnosť je oveľa jednoduchšie ako s obmedzeniami typu nerovnosť. Obmedzenia typu nerovnosť sú aproximované bariérovou funkciou a pristupuje sa k nim ako k obmedzeniam typu rovnosť [1, 2, 4–6]. V nasledujúcej časti predstavíme metódu primárnej-duálnej prípustnosti tak ako bola uvedená v [1]. Predpokladáme všeobecný optimalizačný problém v tvare:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) \quad (2.5a)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (2.5c)$$

kde $f(\mathbf{x})$ je všeobecná účelová funkcia, požiadavky na ňu sú, aby bola spojitá a diferencovateľná do druhého rádu (aspoň spojitosť $\mathcal{C}^2$), $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sú obmedzenia typu rovnosť a $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ sú obmedzenia typu nerovnosť u obidvoch je požiadavka spojitosti a diferencovateľnosti do druhého rádu ($\mathcal{C}^2$ spojitosť). Metóda vnútorného bodu dokáže riešiť ľubovoľné nelineárne optimalizačné problémy, za predpokladu splnenia uvedených podmienok, pričom nepotrebuje žiadnu inú metódu ako sekvenčné kvadratické programovanie.

Metóda vnútorného bodu aproximuje obmedzenia typu nerovnosť logaritmickou bariérou tvaru:

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{t}\varphi(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

kde:

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\sum_{n=1}^N \ln(-h_n(\mathbf{x})) \quad (2.7)$$

a t je parameter, ktorým prispôsobujeme tvar bariéry, čím má t väčšiu hodnotu, tým lepšie sú aproximované obmedzenia typu nerovnosť $\mathbf{h}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$. Avšak pokiaľ by sme začali optimalizovať s príliš veľkým parametrom t , tak by bola príliš nízka

váha na bariérovom člene a tak nájdené riešenie by mohlo odignorovať obmedzenia typu nerovnosť.

Použitie logaritmickkej bariéry je výhodné hlavne kvôli tvaru gradientu logaritmickkej funkcie:

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{h_n(\mathbf{x})} \nabla h_n(\mathbf{x}) \quad (2.8a)$$

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{h_n(\mathbf{x})^2} \nabla h_n(\mathbf{x}) \nabla h_n(\mathbf{x})^\top - \sum_{n=1}^N \frac{1}{h_n(\mathbf{x})} \nabla^2 h_n(\mathbf{x}) \quad (2.8b)$$

Na optimalizačný problém (2.5a) sa môžeme pozeráť ako na minimalizačný problém primárnych premenných alebo aj ako na maximalizačný problém duálnych premenných. Každý bod z centrálnej trajektórie má teda k sebe duál. Definujeme duálnu premennú:

$$\mu_n = -\frac{1}{t h_n(\mathbf{x}^*(t))} \quad (2.9)$$

Metóda primárnej-duálnej prípustnosti vychádza z faktu, že k primárnemu minimalizačnému problému existuje duálny maximalizačný problém [1]. V tejto metóde ale vplyvom sekvenčných výpočtov získané riešenie nemusí byť vždy realizovateľné a nedokážeme určiť duálny rozdiel. Definujeme preto náhradný duálny rozdiel η , ktorý aproximuje rozdiel medzi primárnym a duálnym riešením:

$$\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = -\mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu} \quad (2.10)$$

Vyjadríme podmienku stacionárnosti KKT podmienok:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\lambda} + \sum_{n=1}^N \mu_n \nabla h_n(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.11a)$$

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.11b)$$

$$-\text{diag}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \frac{1}{t} \mathbf{1} = 0 \quad (2.11c)$$

kde $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^\top$. K μ_n sa správame ako ku samostatným premenným, v rovnici (2.11c) obmedzujeme hodnoty μ_n , aby riešenie bolo konzistentné s predošlou definíciou 2.9. Aplikujeme Newtonovu metódu na podmienky 2.11. Vypočítame Hessián:

$$\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^M \lambda_m \nabla^2 g_m(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N \mu_n \nabla^2 h_n(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

Označíme:

$$\mathbf{r}_d = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\lambda} + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{r}_c = -\text{diag}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \frac{1}{t}\mathbf{1} \quad (2.13b)$$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.13c)$$

Získali sme lineárnu sústavu rovníc, ktorej riešenie je krok posunutia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^\top & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ -\text{diag}(\boldsymbol{\mu})\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) & 0 & -\text{diag}(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_d \\ \mathbf{r}_c \\ \mathbf{r}_p \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

V sústave rovníc (2.14) sme zmiernili obmedzenia typu nerovnosť parametrom δ , táto relaxácia má zabezpečiť, aby algoritmus bol robustnejší z hľadiska numerickej stability a zabezpečili sme tak konvergenciu k riešeniu. Aby riešenie neuviazlo v blízkosti optima, tak parameter δ budeme geometricky znižovať s každou iteráciou $\delta := \gamma\delta$, $0 < \gamma \leq 1$.

Algoritmus 1 Metóda primárnej-duálnej prípustnosti

- 1: Definuj realizovateľný začiatočný stav $\mathbf{x}_0$, tolerancie $\varepsilon_d > 0$, $\varepsilon_p > 0$, $\varepsilon_c > 0$, rastový faktor $\vartheta > 0$, faktor zabúdania $0 < \gamma \leq 1$
 - 2: **repeat**
 - 3: $t = \vartheta N / \eta$
 - 4: Vyhľadaj problém (2.14)
 - 5: Spätné vyhľadávanie, určenie miery posunutia s
 - 6: $\mathbf{x} := \mathbf{x} + s \Delta \mathbf{x}$
 - 7: $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} + s \Delta \boldsymbol{\lambda}$
 - 8: $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\mu} + s \Delta \boldsymbol{\mu}$
 - 9: $\delta := \gamma \delta$
 - 10: **until** $\|\mathbf{r}_d\| < \varepsilon_d$ a $\|\mathbf{r}_p\| < \varepsilon_p$ a $\|\mathbf{r}_c\| < \varepsilon_c$
-

V algoritme 1 sme $t = \vartheta N / \eta$ vyjadrili z hranice duálneho rozdielu N/t a podmienky komplementarity (2.11c), kde sme porovnali:

$$\vartheta \frac{N}{t} = \eta \quad (2.15)$$

kde ϑ je rastový faktor, ktorý je voliteľný, má zohľadňovať, že nevieme určiť duálny rozdiel.

Je viacero možností akým spôsobom aplikovať spätné vyhľadávanie v algoritme 1. Boyd vo svojej práci [1] uviedol nasledovný algoritmus. Po posunutí v ďalšom kroku, aby bola splnená podmienka duálnej prípustnosti (2.4c), musí platiť $\mu_n + s \Delta\mu_n \geq 0$, pre všetky obmedzenia n , podľa tejto podmienky vyberieme mieru posunutia s :

$$s = \min \left\{ -\frac{\mu_n}{\Delta\mu_n}, 1 \right\}, \quad \forall \Delta\mu_n < 0 \quad (2.16)$$

Danú hodnotu (2.16), použijeme ako začiatočnú hodnotu do algoritmu spätného vyhľadávania. Spätné vyhľadávanie sa realizuje v dvoch krokoch. Najskôr zmenšujeme hodnotu miery posunutia $s := \beta s$, $\beta \in (0, 1)$ pokiaľ pre všetky obmedzenia neplatí $h_n(\mathbf{x}_k + s \Delta\mathbf{x}) \leq 0$. Následne Boyd [1] uviedol ešte podmienku:

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu})\| \leq (1 - \alpha s) \|\mathbf{r}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})\| \quad (2.17)$$

V podmienkach ukončenia algoritmu spätného vyhľadávania vo všeobecnosti platí určitá voľnosť a jej voľba je na tvorcovi algoritmu, poprípade je možnosť aj návrhu vlastných podmienok. My sme ukončili algoritmus keď prvky vektora $\mathbf{r}$: $\|\mathbf{r}_d\| < \varepsilon_d$ a $\|\mathbf{r}_p\| < \varepsilon_p$ a $\|\mathbf{r}_c\| < \varepsilon_c$ klesli pod určité tolerancie ε .

2.3 Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova (HJB) rovnica

Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova (HJB) rovnica je nelineárna parciálna diferenciálna rovnica, ktorej riešenie nie je vždy triviálne nájsť, v skutočnosti vo väčšine prípadov to je nemožné, rôznymi numerickými alebo zjednodušujúcimi metódami môžeme aspoň nájsť približné riešenie. Rovnica je veľmi dôležitým poznatkom v teórii nelineárneho optimálneho riadenia, pretože predstavuje nutnú a postačujúcu podmienku optimality [3, 7–11]. Rovnica vychádza z princípu dynamického programovania:

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \min_{\mathbf{u}} \left\{ V(t + dt, \mathbf{x}(t + dt)) + \int_t^{t+dt} \mathcal{L}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \right\} \quad (2.18)$$

Z ktorého môžeme odvodiť HJB rovnicu:

$$-\frac{\partial V(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\partial V(t, \mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \right\} \quad (2.19)$$

Použili sme tu fakt, že model systému je možné vyjadriť ako systém rovníc prvého rádu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

HJB rovnica (2.19) má súvis s Lyapunovou teóriou stability [10]. V Lyapunovej teórii stability hľadáme Lyapunovu funkciu $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ čo je ľubovoľná funkcia, ktorá

je spojitá so spojitou prvou deriváciou, pozitívne definitná $\mathcal{V}(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \neq 0$, pre $\mathbf{x} = 0$ je $\mathcal{V}(0) = 0$ a pre jej časovú deriváciu platí $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) < 0$, $\mathbf{x} \neq 0$. Pokiaľ takáto funkcia existuje tak je daný stacionárny bod stabilný. Ak v rovnici (2.19) definujeme:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} = \left. \frac{\partial V(\tau, \mathbf{x}(t))}{\partial \tau} \right|_t + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.20)$$

tak ju môžeme prepísať:

$$0 = \min_{\mathbf{u}} \{ \dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \} \quad (2.21)$$

V prípade optimality potom máme:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \implies \dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.22)$$

Čiže môžeme tvrdiť, pokiaľ $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0$, tak $\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) \leq 0$ a Bellmanova funkcia $V(t, \mathbf{x}(t))$ je tiež Lyapunovou funkciou a riadenie navrhnuté podľa HJB rovnice je stabilné.

3 Lineárny kvadratický regulátor (LQR)

V nasledujúcej časti už prejdeme na analýzu niektorých foriem optimálneho riadenia. Pri analýze budeme používať metódy a algoritmy, ktoré sme predstavili v teórii optimalizácie. Najskôr budeme študovať teóriu optimálneho riadenia pre lineárne systémy. Predstavíme teóriu lineárneho-kvadratického (LQ) riadenia. LQ riadenie je formou optimálneho riadenia, v ktorej je snahou vyriešiť problém kvadratického programovania pre lineárne systémy:

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \quad J = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \right) dt \quad (3.1a)$$

$$\text{s. t.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.1b)$$

kde $\varphi(\mathbf{x}(t_f))$ je pokuta v konečnom stave $\mathbf{x}(t_f)$, L je Lagrangian systému [10, 12–14].

3.1 LQR s pozorovateľom

V reálnych systémoch niekedy nemáme prístup ku všetkým vnútorným stavom a je nutné ich hodnoty vhodne aproximovať. Reálne systémy sú tiež zafaržené procesným šumom a šumom merania, ktorý je nutné zohľadniť v návrhu zákona riadenia. V nasledujúcom algoritme predstavíme spojenie LQ riadenia s pozorovateľom stavu [10, 12, 13, 15].

Predpokladáme stavový model systému s poruchami:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta} \quad (3.2b)$$

kde $\boldsymbol{\xi}$ je procesný šum, $\boldsymbol{\zeta}$ je šum merania. Definujeme pozorovateľa stavu pre tento systém v tvare:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (3.3a)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} \quad (3.3b)$$

kde strieška " ^ " označuje odhady skutočných veličín. Matica $\mathbf{L}$ je zosilnenie pozorovateľa, možnosti jej návrhu opíšeme neskôr.

Definujeme stavovú odchýlku $\boldsymbol{\varepsilon}$ medzi skutočným stavom $\mathbf{x}$ a odhadom $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (3.4)$$

V ďalšom kroku odvodíme dynamiku odchýľky. Spravíme časovú deriváciu odchýľky (3.4) a dosadíme do nej stavový model (3.2) a odhad stavov (3.3), z toho dostaneme:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad (3.5)$$

Z (3.5) potom po niekoľkých úpravách máme:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\xi} \quad (3.6)$$

Definujeme zákon riadenia na základe odhadov stavov $\hat{\mathbf{x}}$ v tvare:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \quad (3.7)$$

kde $\mathbf{K}$ je matica zosilnenia stavového riadenia. Zosilnenie stavového riadenia môžeme odvodiť z HJB rovnice (2.19):

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{P}\mathbf{A} \quad (3.8)$$

kde matica $\mathbf{P}$ je riešená Riccatiho diferenciálnou rovnicou, ktorá rovnako vyplýva z HJB rovnice (2.19):

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\top}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{P} \quad (3.9)$$

Z definície odchýľky (3.4) vyjadríme odhad stavov $\hat{\mathbf{x}}$ a spolu so zákonom riadenia (3.7) dosadíme do stavového modelu (3.2a) a upravíme do tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi} \quad (3.10)$$

Cieľom riadenia je stabilizovať vývoj stavov systému (3.10) ako aj odchýľku medzi odhadom a meraním (3.6):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{L} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica. Matica $\hat{\mathbf{A}}$ je bloková trojuholníková matica, aby bola Hurwitzova musíme vhodne zvoliť $\mathbf{K}$ a $\mathbf{L}$. Pre blokovú trojuholníkovú maticu platí, že jej vlastné čísla sú vlastné čísla blokových submatic na hlavnej diagonále. Matice $\mathbf{K}$ a $\mathbf{L}$ môžeme teda voliť nezávisle od seba a táto vlastnosť sa nazýva princíp separácie. To znamená, že regulátor a pozorovateľ môžeme navrhovať oddelene, musíme len zabezpečiť, aby obidva návrhy: $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ a $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ boli Hurwitzove matice. Princíp separácie navyše neplatí len pre LQR ale vo všeobecnosti aj pre iné metódy riadenia.

Ak budeme predpokladať, že šumy $\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{\zeta}$ majú Gaussove rozdelenie, tak kombinácia LQR a Kalmanovho filtra sa tiež označuje ako lineárne kvadratické Gaussove riadenie (Linear Quadratic Gaussian control - LQG). Zosilnenie pozorovateľa môžeme teda navrhnúť ako Kalmanovo zosilnenie.

3.2 LQR s integrálnym členom

Lineárne kvadratické riadenie reguluje stavy systému do nuly. V prípade externých porúch, nepresností modelu alebo riadenia na referenčnú hodnotu sa môžu počas riadenia vyskytovať trvalé regulačné odchýlky [16–23]. Definujeme stavovú regulačnú odchýlku:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^* \quad (3.12)$$

kde $\mathbf{y}^*$ je referenčný signál a $\mathbf{y}$ je výstup systému. Počas riadenia na referenčnú hodnotu žiadame, aby $\mathbf{e} \rightarrow 0$ namiesto klasickej LQR formulácie $\mathbf{x} \rightarrow 0$.

Regulačnú odchýlku (3.12) potrebujeme zakomponovať do optimalizácie LQR. Potrebujeme využiť vlastnosť, že LQR je navrhnuté, aby svoje vnútorné stavy regulovalo do nuly. Musíme teda nájsť takú skupinu stavov, ktorá zahrnie dynamiku systému a súčasne aj regulačnú odchýlku. Predpokladajme, že systém riadime na konštantnú hodnotu, ak je regulátor navrhnutý správne a stabilizuje systém, tak musí dosiahnuť nejakú ustálenú hodnotu. V ustálenom stave platí $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$, týmto sme našli nový stav, ktorý zahrnie dynamiku do novej formulácie LQR problému.

Potrebujeme odvodiť ešte nový stavový model. Dynamika regulačnej odchýlky je definovaná rovnicou:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} \quad (3.13)$$

a rovnako zderivujeme aj stavový model, aby sme získali dynamiku nového stavu $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \quad (3.14)$$

Z tohto môžeme vytvoriť rozšírený stavový model v tvare:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.15)$$

kde $\hat{\mathbf{A}}$ a $\hat{\mathbf{B}}$ sú rozšírené matice stavového modelu a $\boldsymbol{\xi}$ je nový stav systému, ktorý v sebe zahrňa regulačnú odchýlku.

LQR môže byť pre tento rozšírený systém navrhnuté rovnako ako v predošlých kapitolách. Zákon riadenia, ktorý získame z návrhu bude v tvare:

$$\dot{\mathbf{u}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_i & \mathbf{K}_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Avšak odvodený výraz (3.16) predstavuje časovú deriváciu hľadaného zákona riadenia, preto výraz ešte zintegrujeme a získame LQR s integrálnym členom:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{e} dt - \mathbf{K}_s \mathbf{x} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{e} dt \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

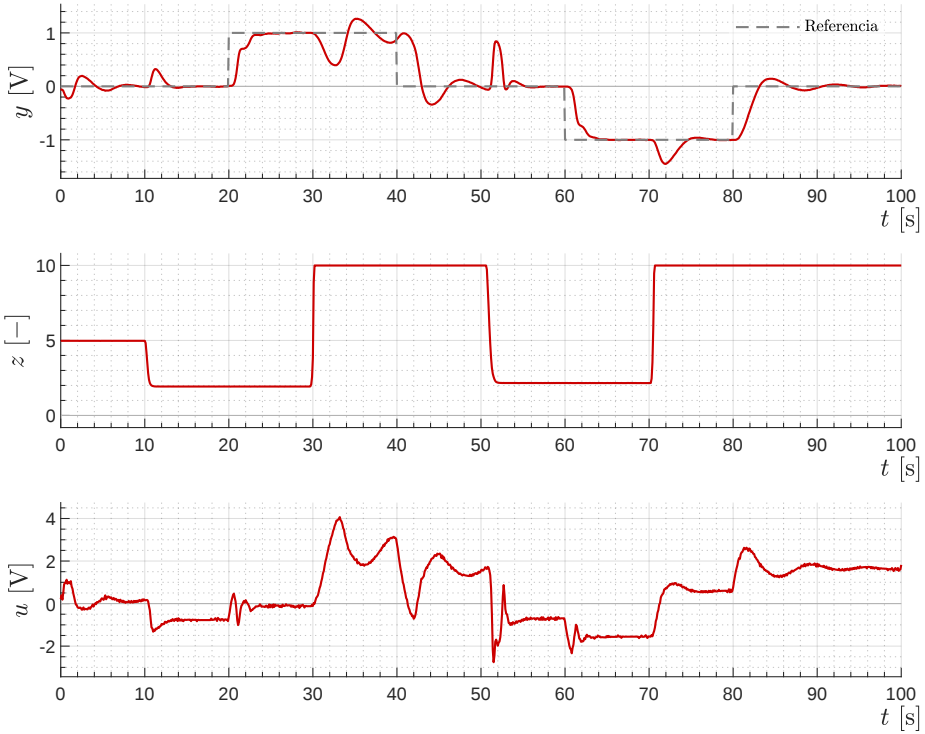
3.3 Implementácia LQG s integrálnym členom na reálny systém

V publikácii [24] sme na laboratórny systém implementovali LQR riadenie s integrálnym členom a s Kalmanovým filtrom ako pozorovateľom stavu. Vstupom a výstupom systému bolo napätie, výstup predstavoval rýchlosť otáčok motora. Systém obsahoval potenciometer, ktorého nastavením sme mohli meniť parametre systému (pozri tabuľku 1), predstavoval teda parametrickú poruchu. Integračná zložka zabezpečila potlačenie porúch a presné sledovanie referenčného signálu aj pri prudkých zmenách potenciometra.

Tabuľka 1: IDENTIFIKOVANÉ MODEL Y

	y_Q	A_c	B_c
a)	6.1085	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.8720 & -2.9501 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4.1892 \end{bmatrix}$
b)	4.7655	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5582 & -2.5157 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2.0166 \end{bmatrix}$
c)	3.1780	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.0342 & -2.5774 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1.0992 \end{bmatrix}$

Priebeh riadenej veličiny y , nastavenia potenciometra z a generovaného vstupu u je zobrazený na obrázku 1. Z experimentu konštatujeme, že návrh riadenia dokázal potlačiť poruchy a spoľahlivo sledovať referenčný signál. Aj keď podľa tabuľky 1 sú zmeny medzi modelmi značné.



Obr. 1: Implementácia LQG s integrálnym členom na reálny systém, y - výstup, z - externá porucha, u - vstup (prevzaté z [24]).

4 Riadenie v klzavom režime (SMC)

V nasledujúcej kapitole popíšeme riadenie v klzavom režime, ktoré budeme používať na robustifikáciu zákonov riadenia. Riadenie v klzavom režime (Sliding Mode Control - SMC) je nelineárna metóda riadenia, nejde o optimálnu metódu riadenia, ale o robustnú. Robustnosť je vlastnosť, ktorá častokrát algoritmom optimálneho riadenia chýba. Na dosiahnutie robustnosti sa potom vyberajú suboptimálne riešenia alebo sa optimálne riadenie kombinuje s inými metódami, ktoré vnesú robustnosť do systému, napríklad je teda možné použiť aj riadenie v klzavom režime. Klzavý režim je špeciálny stav systému, v ktorom sa trajektórie systému pohybujú ("klžu") po vopred definovanom prepínacom povrchu. Riadenie v klzavom režime systému vnucuje dynamiku definovanú prepínacím povrchom. Systém v klzavom režime sa správa invariantne voči poruchám a prípadným nepresnostiam modelu [25–30].

4.1 Integrálny klzavý režim (ISMC)

V autoreferáte bližšie popíšeme len riadenie v integrálnom klzavom režime. Klasické riadenie v klzavom režime sa skladá z dvoch fáz. Po začiatku riadenia nastáva fáza dosahovania prepínacieho povrchu, po jeho dosiahnutí nasleduje fáza samotného klzavého režimu. Počas fázy dosahovania systém nie je invariantný voči parametrickým a externým poruchám, invariantnosť získa až po dosiahnutí prepínacieho povrchu. Myšlienkou integrálneho klzavého režimu je odstrániť túto fázu dosahovania a začať riadenie priamo na prepínacom povrchu [25–27, 31].

Zákon riadenia rozdelíme na dve časti:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

kde $\mathbf{v}$ je doplnkové klzavé riadenie, ktoré zabezpečuje kompenzáciu porúch a systém udržiava na klzavom povrchu od začiatku riadenia $\mathbf{u}^*$ je vstup, ktorý riadi regulačnú odchýlku do nuly.

Prepínacia funkcia $\mathbf{s}$ je zvyčajne zvolená ako lineárne zobrazenie stavového vektora $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (4.2)$$

jej časová derivácia je v tvare:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{z}} \quad (4.3)$$

kde $\mathbf{S}$ je matica definujúca tvar prepínacieho povrchu a $\mathbf{z}$ je integrálna časť prepínacej funkcie, ktorá zabezpečí, že stavové trajektórie systému začínajú na prepínacom povrchu.

Do (4.3) dosadíme stavový model:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4.4)$$

so zákonom riadenia (4.1):

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{S}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^* + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{v}) + \dot{\mathbf{z}} \quad (4.5)$$

Požadujeme, aby sa systém od začiatku riadenia vyskytoval na prepínacom povrchu, čiže $\mathbf{s} = 0$ a tiež $\dot{\mathbf{s}} = 0$, preto zvolíme:

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{S}\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^* \quad (4.6)$$

Po zintegrovaní (4.6) dostaneme:

$$\mathbf{z} = -\mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*) d\tau \quad (4.7)$$

Spätným dosadením do (4.2) získame prepíniaciu funkciu pre integrálny kízavý režim:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{x}(0) - \mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*) d\tau \quad (4.8)$$

kde člen $\mathbf{S}\mathbf{x}(0)$ je začiatočná podmienka systému, aby aj v začiatočnom stave platilo $\mathbf{s}(0) = 0$.

4.2 Integrálny kízavý režim pre sledovanie trajektórie

Chceme vyjadriť riadenie v integrálnom kízavom režime aj pre prípad, keď chceme sledovať referenčný signál s dynamikou. Definujeme stavovú regulačnú odchýlku $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad (4.9)$$

kde $\mathbf{x}$ je stavový vektor a $\mathbf{x}^*$ je referenčný signál.

Vyjadríme časovú deriváciu regulačnej odchýlky:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^* - \dot{\mathbf{x}}^* \quad (4.10)$$

a vytvoríme prepíniaciu funkciu definovanú pre regulačnú odchýlku:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{e} - \mathbf{S}\mathbf{e}(0) - \mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^* - \dot{\mathbf{x}}^*) d\tau \quad (4.11)$$

Do (4.11) dosadíme (4.9) a zintegrujeme referenčný signál $\mathbf{x}^*$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{S}\mathbf{e}(0) - \mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*) d\tau + \mathbf{S}\mathbf{x}^* \quad (4.12)$$

Z (4.12) vidíme, že prepínacia funkcia nezávisí od referenčného signálu, ale len od aktuálneho stavu systému:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{e}(0) - \mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*) d\tau \quad (4.13)$$

5 Prediktívne riadenie (MPC)

MPC je formou optimálneho riadenia. Cieľom MPC je nájsť optimálny regulačný pochod v určitom časovom úseku. Dĺžka časového úseku sa nazýva horizont predikcie a dĺžka regulačného pochodu sa nazýva horizont riadenia. Proces riadenia začína meraním aktuálneho stavu systému. Z daného stavu optimalizácia vygeneruje regulačný pochod o dĺžke horizontu riadenia. Reakcia na tento regulačný pochod je odsimulovaná v predikcii, dĺžka jednej simulácie je rovná horizontu predikcie. Pokiaľ je výsledok uspokojivý prvý prvok regulačného pochodu je použitý ako vstup do reálneho systému. Následne sa celý proces posunie o periódu vzorkovania a vykoná sa znova. V tejto kapitole predstavíme dve formy MPC, ktorým sme venovali najväčšiu časť výskumu.

5.1 Tube-Based MPC

Tube-based MPC je robustnou formou robustného prediktívneho riadenia. Pre príklad budeme vychádzať z modelu systému s neurčitostami $\mathbf{d}$, tak ako bol uvedený v [32]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (5.1)$$

Systém (5.1) v sebe obsahuje neurčitosti na vstupoch a nelinearity vzhľadom na stavy.

Tube-based MPC pozostáva z rozdelenia riadenia na spätnoväzobné robustné riadenie, ktorého úlohou je udržať stavy systém $\mathbf{x}$ v blízkosti nominálnych stavov $\mathbf{x}^*$. A prediktívne riadenie, ktoré generuje nominálne stavy systému [32–34]. Nominálne stavy systému $\mathbf{x}^*$ sú získané na základe riešenia optimalizačného problému v krátkom časovom úseku pre nominálny model [32]:

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k^*) + \mathbf{b}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{u}_k^* \quad (5.2)$$

Pre nominálny model definujeme optimalizačný problém:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad \sum_{k=0}^{P-1} \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^{*\top} \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k^* + \sum_{k=0}^{C-1} \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^{*\top} \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k^* + \varphi(\mathbf{x}_P^*, \mathbf{u}_P^*) \quad (5.3a)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k^*) + \mathbf{b}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{u}_k^* \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{u}^* \in \mathcal{U} \quad (5.3c)$$

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \quad (5.3d)$$

$$\mathbf{x}_P^* \in \mathcal{X}_P \quad (5.3e)$$

$$\mathbf{y}^* \in \mathcal{Y} \quad (5.3f)$$

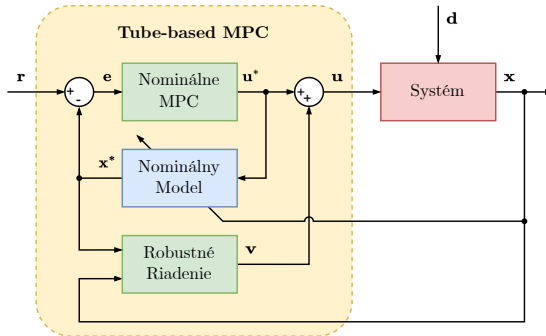
kde $\varphi(\mathbf{x}_P^*, \mathbf{u}_P^*)$ je terminálny člen. Výsledný zákon riadenia je zvyčajne zvolený v tvare:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*(t)) \quad (5.4)$$

kde $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ je doplnkové robustné riadenie, ktoré zabezpečuje, že systémové trajektórie ostanú v okolí trajektórií nominálneho modelu, toto okolie sa nazýva invariantná množina (tube). Na obrázku 2 je znázornená bloková schéma Tube-based MPC. V schéme veličiny s "*" označujú premenné nominálneho systému, $\mathbf{r}$ je referenčný signál. Cieľom MPC je riadiť nominálny model na základe referenčného signálu $\mathbf{r}$ [32–34] ako nominálny model môžeme zvoliť lineárny systém:

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{x}_k^* + \mathbf{B}^* \mathbf{u}_k^* \quad (5.5)$$

doplnkové riadenie potom kompenzuje aj nelinearity.



Obr. 2: Tube-based MPC bloková schéma

5.2 Offset-free MPC

Offset-free MPC je súbor algoritmov MPC, ktoré sú schopné odstrániť trvalú regulačnú odchýlku spôsobenú nepresnosťami modelu a externými poruchami. MPC algoritmy sú vo všeobecnosti veľmi závislé od presnosti modelu a od nemodelovaných porúch. V prípade nepresností medzi modelom a systémom alebo nemerateľných externých porúch je nutné zvoliť iný prístup ako klasické MPC. Jedna z prvých metód bolo dynamické maticové riadenie (DMC), ktoré však bolo aplikovateľné len na stabilné otvorené regulačné obvody. Základnou myšlienkou bolo vytvoriť korekciu založenú na rozdieli medzi nominálnym výstupom modelu a výstupom systému. Pričom sa predpokladá, že takáto odchýlka je konštantná

počas celého horizontu predikcie. Zovšeobecnenie kombinácie MPC a modelovania porúch, respektíve pozorovateľov porúch, bolo predmetom následného výskumu, ktorého výsledkom je offset-free MPC [35–40].

Máme model poruchy:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{d}_x \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_y \quad (5.6b)$$

kde $\mathbf{d}_x$ je porucha stavov a $\mathbf{d}_y$ je porucha na výstupe. Pozorovateľ poruchy môžeme získať z pozorovateľa stavu.

V kroku predikcie budeme vychádzať z modelu bez porúch, ktorý použijeme na odhad budúceho stavu systému $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \quad (5.7)$$

Počas kroku korekcie získame aj odhady porúch:

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (5.8a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{d}_x \quad (5.8b)$$

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (5.8c)$$

kde $\mathbf{K}$ je matica zosilnenia pozorovateľa. Znova môžeme zvoliť časovo invariantný Kalmanov filter, kde sa $\mathbf{K}$ vypočíta pomocou:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_f)^{-1} \quad (5.9)$$

Maticu kovariancie získame z Riccatiho rovnice:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_f)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}_f \quad (5.10)$$

Rozšírením modelu (5.6) o pozorovateľ poruchy nastane aj zmena vo formulácii optimalizačného problému. Kvadratický optimalizačný problém je teraz definovaný nasledovne:

$$\min_{\mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}} \quad J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^P \mathbf{e}_k^\top \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{C-1} \Delta \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R}_k \Delta \mathbf{u}_k \quad (5.11a)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \Delta \mathbf{u}_k \quad (5.11b)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_x \quad (5.11c)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_y \quad (5.11d)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{r}_k \quad (5.11e)$$

$$\mathbf{u}_k \geq \mathbf{u}_{\min} \quad (5.11f)$$

$$\mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (5.11g)$$

6 Tube-based offset-free MPC s integrálnym kízavým režimom (ISMC)

Zoberieme zákon riadenia (4.1) z kapitoly 4.1:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

z jeho štruktúry vidíme, že je rovnaká ako pri tube-based MPC. Takáto štruktúra umožňuje navrhnuť prvý člen $\mathbf{u}^*$ ako MPC, ktoré bude zabezpečovať, aby systém sledoval referenčný signál, pričom nepresnosti medzi modelom a systémom sú kompenzované druhým členom $\mathbf{v}$. Druhý člen $\mathbf{v}$ navrhujeme ako doplnkové riadenie na báze integrálneho kízavého režimu, jeho úlohou bude udržať systém na prepínacom povrchu. Definujeme $\mathbf{v}$ cez pravidlo dosiahnutia $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}(\mathbf{s}) \quad (6.2)$$

kde $\mathbf{s}$ je prepínacia funkcia, v kapitole 4.2 sme ukázali, že okrem začiatočnej podmienky nezávisí na referenčnom signáli:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{e}(0) - \mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*) d\tau \quad (6.3)$$

Naším príspevkom do teórie optimálneho riadenia je vytvorenie novej štruktúry prediktívneho riadenia, v ktorej sme skombinovali koncepty tube-based MPC s offset-free MPC. Offset-free MPC dokáže odstrániť trvalú regulačnú odchýlku aj za prítomnosti modelových nepresností a externých porúch má ale horšie tlmiace vlastnosti pri harmonických poruchách ako tube-based MPC s kízavým režimom.

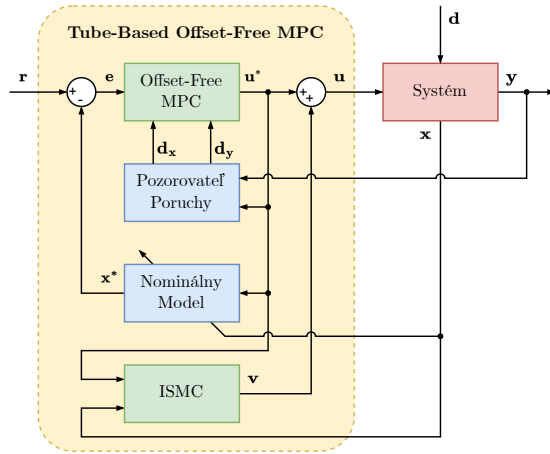
Riadenie v kízavom režime sme zvolili ako doplnkový zákon riadenia v tube-based MPC, lebo v ideálnom kízavom režime sa systém správa invariantne voči parametrickým a externým poruchám. Táto invariantnosť je dosiahnutá, že systému vnútime dynamiku, ktorá je definovaná prepínacím povrchom. Pri vhodne definovanom prepínacom povrchu vieme dosiahnuť konvergenciu systému k nominálnemu modelu. Riadenie v kízavom režime sa skladá z fázy dosahovania prepínacieho povrchu a z fázy samotného kízavého režimu, v ktorom sa systém pohybuje po prepínacom povrchu. Počas fázy dosahovania avšak systém nie invariantný voči poruchám túto fázu je, ale možné odstrániť zvolením štruktúry s integrálnym kízavým režimom. Kízavý režim sme však nahradili kvázi-kízavým režimom, aby sme sa vyhli vzniku chattering-u.

Navrhnutý zákon riadenia má tvar:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) - \alpha \tanh\left(\frac{\mathbf{s}}{\varphi}\right) - k \mathbf{s} \quad (6.4a)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{e}(0) - \mathbf{S} \int_0^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*) d\tau \quad (6.4b)$$

kde $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ je offset-free MPC. Na obrázku 3 je zobrazená bloková schéma navrhnutého zákona riadenia.



Obr. 3: Bloková schéma tube-based offset-free MPC s ISMC

6.1 Implementácia tube-based offset-free MPC s ISMC

Riadenie otestujeme na modeli motorčeka z kapitoly 3.3. Predpokladáme, že systém v stavovej reprezentácii:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6.5)$$

je opísaný nasledujúcimi maticami:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5 & -2,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Systém sme ale identifikovali s nepresnosťami:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,2 & -2,9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Súčasne tento model (6.7) budeme používať aj ako nominálny model, pretože v tomto experimente predstavuje najlepší odhad systému (6.5). Vidíme jasnú nezhodu medzi "skutočným" systémom (6.6) a jeho modelom (6.7). V čase $t = 5$ s a $t = 10$ s navyše zavedieme do systému konštantnú a harmonickú poruchu na vstup, v uvedenom poradí:

$$d = \vartheta(t - 5)\gamma + \vartheta(t - 10)A \sin(\omega t), \quad A = 1 \text{ s}^{-2}, \quad \omega = 4 \text{ s}^{-1}, \quad \gamma = 1 \text{ s}^{-2} \quad (6.8)$$

kde ϑ je Heavisideova funkcia.

Riadenie navrhujeme pre horizont predikcie $P = 50$ a horizont riadenia $C = 5$, s periódou vzorkovania simulácie $\Delta t = 0,01$ s a periódou vzorkovania riadenia $\Delta t = 0,05$ s, vstup je obmedzený v intervale $u \in \langle -5, 5 \rangle$. Váhové matice pre MPC zvolíme v tvare:

$$\mathbf{Q} = [100], \quad \mathbf{R} = [1] \quad (6.9)$$

Parametre SMC v tube-based MPC a ISMC v tube-based offset-free MPC zvolené nasledovne:

$$\mathbf{S} = [10 \quad 1], \quad \alpha = 10, \quad \varphi = 1, \quad k = 1 \quad (6.10)$$

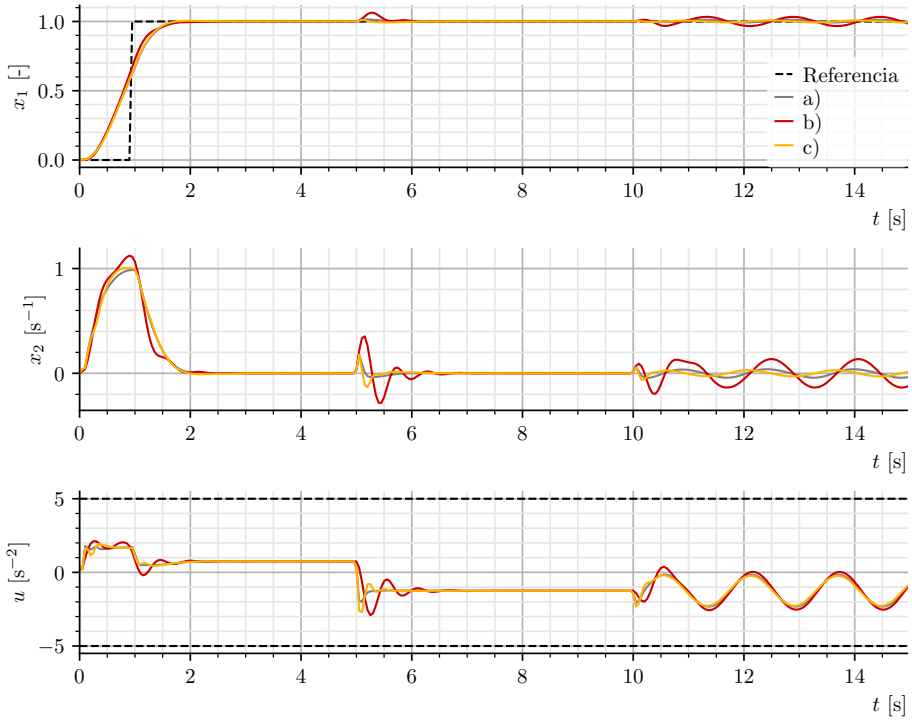
Predpokladáme spojité pravidlo dosiahnutie v tvare:

$$p = -\alpha \tanh\left(\frac{s}{\varphi}\right) - k s \quad (6.11)$$

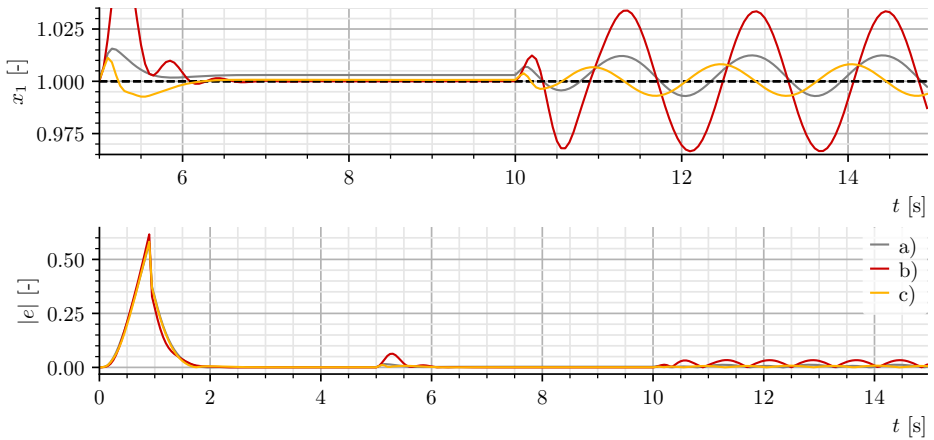
kde prepínacia funkcia je podľa (6.4a). Kovariančné matice pre Kalmanov filter sme zvolili na tieto hodnoty:

$$\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 6,1486 \cdot 10^{-6} & 2,4594 \cdot 10^{-4} \\ 2,4594 \cdot 10^{-4} & 9,8377 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_f = [0,0001] \quad (6.12)$$

Na obrázku 4 môžeme vidieť vykreslený priebeh riadenia pre všetky tri metódy. Z hľadiska vyhodnotenia je zaujímavejšie priblíženie a absolútna hodnota regulačnej odchýlky, ktoré sme zobrazili na obrázku 5. Tu vidíme rozdiely medzi jednotlivými metódami. Tým, že model je nepresný a navyše na vstup pôsobí konštantná porucha tube-based MPC (a)) nedokáže úplne odstrániť trvalú regulačnú odchýlku. Avšak tube-based MPC má lepšie tlmiace vlastnosti harmonickej poruchy pri porovnaní s offset-free MPC (b)). Offset-free MPC však odstránilo trvalú regulačnú odchýlku spôsobenú nepresnosťami modelu a konštantnou poruchou. Naša navrhnutá metóda tube-based offset-free MPC s ISMC (c)) dokázala skombinovať vlastnosti obidvoch metód, odstránila trvalú regulačnú odchýlku a zároveň zlepšila aj tlmiace vlastnosti. Môžeme tvrdiť, že z porovnaných metód má najlepšie vlastnosti.

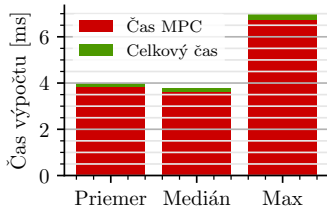


Obr. 4: Porovnanie a) tube-based MPC, b) offset-free MPC, c) tube-based offset-free MPC s ISMC.

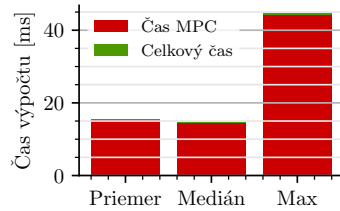


Obr. 5: Horný graf - približenie výstupu; dolný graf - absolútna hodnota odchýlky:
a) tube-based MPC, b) offset-free MPC, c) tube-based offset-free MPC
s ISMC.

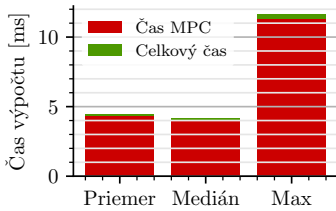
Odmerali sme čas výpočtu jednotlivých metód MPC a porovnali s dobou výpočtu Python modulu `cvxopt`. Daný modul sme vybrali preto lebo tiež používa metódu vnútorného bodu primárnej duálnej prípustnosti, rovnako ako implementovaný algoritmus 1. Chceli sme ukázať, že vlastnou implementáciou na konkrétne optimalizačné problémy dokážeme redukovať výpočtový čas. Zrýchlenie výpočtov je spôsobené lepšou alokáciou zdrojov v optimalizačných algoritmoch a konkretizovaniu na optimalizáciu zákonov riadenia. Jednotlivé merania sme vykreslili na obrázkoch 6-11. Z meraní konštatujeme, že naša implementácia znížila výpočtový čas. Časy výpočtu pre `cvxopt` sa pohybujú rádovo v desiatkach milisekúnd. Preto jeho použiteľnosť pri perióde vzorkovania $\Delta t = 50$ ms začína byť otázna. Na druhú stranu náš algoritmus má priemerné časy okolo 5 ms, čo je približne štyrikrát lepšie oproti `cvxopt`, v najhorších prípadoch sa časy pohybujú okolo 10 ms, čo je približne dvakrát rýchlejšie ako `cvxopt`. Navrhnuté riadenie prináša sľubné simulačné výsledky. Zníženie času výpočtu našou implementovanou metódou môže byť rozhodujúce pri implementácii na reálny systém.



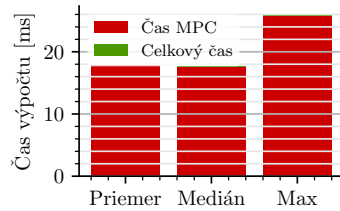
Obr. 6: Tube-based MPC s implementovanou numerickou metódou optimalizácie.



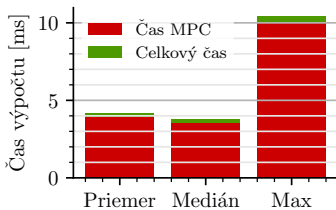
Obr. 7: Tube-based MPC s Python modulom cvxopt.



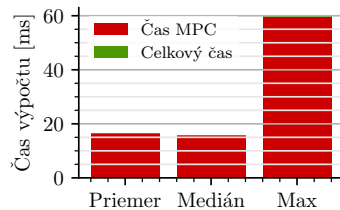
Obr. 8: Offset-free MPC s implementovanou numerickou metódou optimalizácie.



Obr. 9: Offset-free MPC s Python modulom cvxopt.



Obr. 10: Tube-based offset-free MPC s implementovanou numerickou metódou optimalizácie.



Obr. 11: Tube-based offset-free MPC s Python modulom cvxopt.

Záver

V práci sme spracovali prehľad optimalizačných metód a algoritmov optimálneho riadenia. Z teoretických základov sme sa venovali nutným podmienkam optimality a Hamiltonovej-Jacobiho-Bellmanovej rovnici. Následne sme sa zamerali na numerické optimalizačné metódy, predovšetkým metódu vnútorného bodu, ktorá sa ukázala ako výhodná pre použitie v prediktívnom riadení.

Analyzovali sme Kalmanov filter ako optimálny estimátor stavov systému, ktorý sme používali ako pozorovateľ stavov systému a pozorovateľ porúch. V oblasti optimálneho riadenia sme sa venovali LQR regulátorom a ich implementáciám vrátane doplnenia o pozorovateľ stavu a integračný člen, čo umožnilo aplikáciu na reálny systém.

Pre zvýšenie robustnosti sme navrhli kombináciu optimálneho riadenia s riadením v kľzavom režime. Táto kombinácia bola použitá v tube-based MPC a preukázala dobré výsledky v simuláciách aj v reálnych aplikáciách.

Záverom sme sa sústredili na prediktívne riadenie s dôrazom na jeho robustné varianty, konkrétne tube-based MPC a offset-free MPC. Hlavným prínosom práce je návrh metódy, ktorá kombinuje tube-based a offset-free MPC s doplnkovým riadením v integrálnom kľzavom režime. Táto metóda odstránila nedostatky jednotlivých prístupov a dosiahla vysokú presnosť a robustnosť.

Významným praktickým prínosom práce je aj implementácia vlastného numerického algoritmu optimalizácie založeného na metóde vnútorného bodu. V porovnaní s existujúcimi externými Python modulmi dosiahla naša implementácia výrazne kratší výpočtový čas, najmä pri dlhších horizontoch predikcie. Tento rozdiel pripisujeme lepšej alokácii zdrojov v našom algoritme. Rýchlosť riešenia je kľúčovým faktorom pri použití MPC v reálnom čase, a preto naše riešenie predstavuje dôležitý krok smerom k praktickej nasaditeľnosti navrhnutej metódy.

Autorove publikácie

- [2023] MÁLIK, R. – OKIENKOVÁ, K. – TÁRNÍK, M. – PAULUSOVÁ, J. – DUCHOŇ, F. Model predictive control: an overview. In: KOZÁKOVÁ, A. (ed.). ELITECH '23: 25th Conference of Doctoral Students. Bratislava: Spektrum STU, 2023. ISBN: 978-80-227-5298-5.
- [2024] MÁLIK, R. – OKIENKOVÁ, K. – VASKO, D. – KARDOS, J. – TÁRNÍK, M. – PAULUSOVÁ, J. Robust Control of a MIMO Laboratory Motion System Using Variable Structure Control and the Computed Torque Method With the Velocity Limitation. IEEE Access. 2024, 12, 143869-143882. Dostupné z doi: 10.1109/ACCESS.2024.3471678. (IF 3.633, Q2 - JCR; 0.849 - SJR, Q1 - SJR; v databáze: CC, WOS, SCOPUS, Google Scholar).
- [2024] MÁLIK, R. – OKIENKOVÁ, K. – TÁRNÍK, M. – PAULUSOVÁ, J. Implementation of Linear Quadratic Control for a Laboratory Motion System. In: KOZÁKOVÁ, A. (ed.). ELITECH '24: 26th Conference of Doctoral Students. Bratislava: Spektrum STU, 2024. ISBN: 978-80-227-5409-5.
- [2024] OKIENKOVÁ, K. – DODEK, M. – MÁLIK, R. – PAULUSOVÁ, J. Model Predictive Control of the Van de Vusse Reaction: Comparing the Deterministic and Stochastic State Estimation. In: ICCC 2024: 25th International Carpathian Control Conference. Danvers: IEEE, 2024. ISBN: 979-8-3503-5070-8. (IEEE conference – v databáze: CC, WOS, SCOPUS, Google Scholar).
- [2024] DOBIŠ, M. – DUCHOŇ, F. – DEKAN, M. – LUČAN, M. – MÁLIK, R. Spôsob autonómneho mapovania pracovného priestoru a systém na mapovanie: Úžitkový vzor č. 10152, Prihláška úžitkového vzoru č. 229-2023, Dátum zápisu: 16.09.2024, Dátum oznámenia o sprístupnení dokumentu: 09.10.2024, Vestník ÚPV SR č.: 19/2024. Banská Bystrica: Úrad priemyselného vlastníctva SR, 2024. 13 s.
- [2025] MÁLIK, R. – HALÁS, M. – TÁRNÍK, M. – OKIENKOVÁ, K. – PAULUSOVÁ, J. – HUPCEJOVÁ, A. Tube-Based Model Predictive Control with a Complementary Control Law Based on Algebraic Methods. In: ICCC 2025: 26th International Carpathian Control Conference. Danvers: IEEE, 2025. ISBN: 979-8-3315-0127-3. (IEEE conference – v databáze: CC, WOS, SCOPUS, Google Scholar).
- [2025] MÁLIK, R. – OKIENKOVÁ, K. – TÁRNÍK, M. – PAULUSOVÁ, J. Implementation of Offset-free Model Predictive Control for a Laboratory Motion System. In: KOZÁKOVÁ, A. (ed.). ELITECH '25: 27th Conference of Doctoral Students. Bratislava: Spektrum STU, 2025.
- [2025] OKIENKOVÁ, K. – PANNOCCHIA, G. – VACCARI, M. – BACCI DI CAPACI, R. – MÁLIK, R. – DODEK, M. – PAULUSOVÁ, J. – TÁRNÍK, M.. Offset-free Model Predictive Control of the Van de Vusse Reaction. In: 25th International Conference on Process Control. 2025. ISBN: 979-8-3315-2531-6. (IEEE conference – v databáze: CC, WoS, Scopus, Google Scholar)
- [2025] ERNEK, M. – TÁRNÍK, M. – ILKA, A. – MÁLIK, R. Robust power system stabilizer tuning using genetic algorithm. Journal of Electrical Engineering. 2025, 76(3), 232-240. Dostupné z doi: 10.2478/jee-2025-0024. (IF 1.16, Q3 - JCR; 0.225 - SJR, Q3 - SJR; v databáze: CC, WOS, SCOPUS, Google Scholar).

Referencie

- [1] S. Boyd a L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004, ISBN: 978-0-521-83378-3.
- [2] J. Nocedal a S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research a Financial Engineering, 2006, ISBN: 978-0387-30303-1.
- [3] D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: a Concise Introduction*. Princeton University Press, 2012, ISBN: 978-0691151878.
- [4] S. J. Wright, *Primal Dual Interior-Point Methods*. Society for Industrial a Applied Mathematics, 1997, ISBN: 0-89871-382-X.
- [5] A. Wächter a L. T. Biegler, „On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming,“ *J. Austral. Math. Soc. 20 (Series B)*, s. 142–146, 2006. DOI: [10.1007/s10107-004-0559-y](https://doi.org/10.1007/s10107-004-0559-y).
- [6] B. W. Bader, „1.16 - Constrained and Unconstrained Optimization,“ in *Comprehensive Chemometrics*, S. D. Brown, R. Tauler a B. Walczak, ed., Oxford: Elsevier, 2009, s. 507–545, ISBN: 978-0-444-52701-1. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-044452701-1.00035-1>.
- [7] M. R. Caputo, *Foundations of Dynamic Economic Analysis Optimal Control Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005, ISBN: 9780511806827. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511806827>.
- [8] S. M. LaValle, *Planning algorithms*. Cambridge University Press, 2006, ISBN: 978-0521862059.
- [9] S. Gros a M. Diehl, *Numerical Optimal Control*. University of Freiburg, 2022.
- [10] R. Tedrake, *Underactuated Robotics, Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation*. 2023. URL: <https://underactuated.csail.mit.edu>.
- [11] O. Hernández-Lerma, L. R. Laura-Guarachi, S. Mendoza-Palacios a D. González-Sánchez, *An Introduction to Optimal Control Theory: The Dynamic Programming Approach*. Springer Cham, 2023, ISBN: 978-3-031-21139-3. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-21139-3>.
- [12] B. D. O. Anderson a J. B. Moore, *Optimal Control: Linear quadratic methods*. Dover Publications, 1989, ISBN: 9780136381228.
- [13] W. H. Kwon a P. Park, *Stabilizing and Optimizing Control for Time-Delay Systems: Including Model Predictive Controls*. Springer International Publishing, 2019, ISBN: 978-3-319-92704-6. DOI: [10.1007/978-3-319-92704-6_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-92704-6_6).
- [14] Z. Hurák, *Optimal and Robust Control*. Czech Technical University in Prague, 2022, Lecture Notes.
- [15] A. N. Putri, C. Machbub, D. Mahayana a E. Hidayat, „Data Driven Linear Quadratic Gaussian Control Design,“ *IEEE Access*, roč. 11, s. 24 227–24 237, 2023. DOI: [10.1109/ACCESS.2023.3254879](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3254879).
- [16] C. Han a W. Wang, „Optimal LQ Tracking Control for Continuous-Time Systems with Pointwise Time-Varying Input Delay,“ in *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*, 2016, s. 2490–2495. DOI: [10.1109/ChiCC.2016.7553738](https://doi.org/10.1109/ChiCC.2016.7553738).
- [17] X. Li, L. Xue a C. Sun, „Linear Quadratic Tracking Control of Unknown Discrete-Time Systems Using Value Iteration Algorithm,“ *Neurocomputing*, roč. 314, s. 86–93, 2018, ISSN: 0925-2312. DOI: [10.1016/j.neucom.2018.05.111](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.05.111).

- [18] L. Martins, C. Cardeira a P. Oliveira, „Linear Quadratic Regulator for Trajectory Tracking of a Quadrotor,“ *IFAC-PapersOnLine*, roč. 52, č. 12, s. 176–181, 2019, 21st IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace ACA 2019, ISSN: 2405-8963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.11.195.
- [19] A. S. Elkhateem a S. N. Engin, „Robust LQR and LQR-PI Control Strategies Based on Adaptive Weighting Matrix Selection for a UAV Position and Attitude Tracking Control,“ *Alexandria Engineering Journal*, roč. 61, č. 8, s. 6275–6292, 2022, ISSN: 1110-0168. DOI: 10.1016/j.aej.2021.11.057.
- [20] F. Gopmandal a A. Ghosh, „LQR-based MIMO PID Control of a 2-DOF Helicopter System with Uncertain Cross-Coupled Gain,“ *IFAC-PapersOnLine*, roč. 55, č. 22, s. 183–188, 2022, 22nd IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace ACA 2022. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.03.031.
- [21] M. Wang et al., „LQR Control and Optimization for Trajectory Tracking of Biomimetic Robotic Fish Based on Unreal Engine,“ *Biomimetics*, roč. 8, č. 2, 2023. DOI: 10.3390/biomimetics8020236.
- [22] S. Zarghoon a C. Belavý, „LQR and Pole Placement Controllers with Integral Action Design Technique and Performance Analysis for Control of Temperature Field in Continuous Casting Process,“ in *2023 24th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, 2023, s. 489–494. DOI: 10.1109/ICCC57093.2023.10178886.
- [23] T. Li, X. Liu, Z. Lin, J. Yang a A. Ioannou, „A Linear Quadratic Regulator With Integral Action of Wind Turbine Based on Aerodynamics Forecasting for Variable Power Production,“ *Renewable Energy*, roč. 223, s. 119 605, 2024, ISSN: 0960-1481. DOI: 10.1016/j.renene.2023.119605.
- [24] R. Málik, K. Okienková, M. Tárník a J. Paulusová, „Implementation of Linear Quadratic Control for a Laboratory Motion System,“ in *ELITECH '24: 26th Conference of Doctoral Students*, A. Kozáková, ed., Bratislava: Spektrum STU, 2024, ISBN: 978-80-227-5409-5.
- [25] C. Edwards a S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis, 1998, ISBN: 9780748406012.
- [26] V. Utkin, J. Guldner a J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems* (Automation and Control Engineering). CRC Press, 2009, ISBN: 9781420065602.
- [27] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman a A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation* (Control Engineering), 1. vyd. New York, NY: Birkhäuser, 2013, zv. XVII, s. 356, ISBN: 978-0-8176-4892-3. DOI: 10.1007/978-0-8176-4893-0.
- [28] J. Kardoš, „Reaching Law Modification of Time Sub-Optimal Variable Structure Control,“ *International Journal of Mechanics and Control*, roč. 6, č. 2, s. 39–49, 2005.
- [29] J. Kardoš, „Robust Point-to-Point Control with Velocity Limitation,“ in *21st International Conference on Process Control*, Štrbské Pleso, Slovakia, 2017.
- [30] J. Kardoš, „Robust Computed Torque Method of Robot Tracking Control,“ in *22nd International Conference on Process Control*, Štrbské Pleso, Slovakia, 2019.
- [31] J. Kardoš, „Modified Integral Sliding Mode Control of Motion System,“ in *2020 International Conference on Cybernetics & Informatics (K&I)*, Institute of Robotics and Cybernetics, FEI STU Bratislava, Danvers, MA, USA: IEEE, 2020, s. 1–6, ISBN: 978-1-7281-4381-1. DOI: 10.1109/KI48306.2020.9039894.
- [32] S. Singh, M. Pavone a J.-J. E. Slotine, „Tube-Based MPC: a Contraction Theory Approach,“ *Stanford University*, 2016. URL: <https://web.stanford.edu/~pavone/papers/Singh.Pavone.Slotine.CDC16EV.pdf>.

- [33] C. Hu, N. Yang a Y. Ren, „Polytopic linear parameter varying model-based tube model predictive control for hypersonic vehicles,“ *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1177/1729881417714398>.
- [34] J. Sieber, S. Bennani a M. N. Zeilinger, „A System Level Approach to Tube-based Model Predictive Control,“ *IEEE Control Systems Letters*, roč. 6, s. 776–781, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3929/ethz-b-000492010>.
- [35] G. Pannocchia a J. Rawlings, „Disturbance Models for Offset-Free Model-Predictive Control,“ *AICHE Journal*, roč. 49, s. 426–437, feb. 2003. DOI: 10.1002/aic.690490213.
- [36] G. Pannocchia a A. Bemporad, „Combined Design of Disturbance Model and Observer for Offset-Free Model Predictive Control,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, roč. 52, č. 6, s. 1048–1053, 2007. DOI: 10.1109/TAC.2007.899096.
- [37] U. Maeder a M. Morari, „Offset-free Reference Tracking with Model Predictive Control,“ *Automatica*, roč. 46, č. 9, s. 1469–1476, 2010. DOI: 10.1016/j.automatica.2010.05.023. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109810002463>.
- [38] P. Tatjewski, „Disturbance modeling and state estimation for offset-free predictive control with state-space process models,“ *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, roč. 24, č. 2, 313and323, 2014.
- [39] G. Pannocchia, „Offset-free tracking MPC: A tutorial review and comparison of different formulations,“ júl 2015, s. 527–532. DOI: 10.1109/ECC.2015.7330597.
- [40] G. Pannocchia, M. Gabiccini a A. Artoni, „Offset-free MPC explained: novelties, subtleties, and applications,“ *IFAC-PapersOnLine*, roč. 48, č. 23, s. 342–351, 2015, 5th IFAC Conference on Nonlinear Model Predictive Control NMPC 2015, ISSN: 2405-8963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.11.304>.