



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Ing. Denis Vasko
Autoreferát dizertačnej práce

**Robustné riadenie MIMO
pohybových systémov s premenlivou
štruktúrou v podmienkach
neurčitosti**

na získanie akademického titulu
„doktor“ („philosophiae doctor“, v skratke „PhD.“)

v doktorandskom študijnom programe: robotika a kybernetika
v študijnom odbore: 9.2.7. kybernetika
Forma štúdia: denná
Miesto a dátum: Bratislava, 2025



Dizertačná práca bola vypracovaná na
Ústave robotiky a kybernetiky Fakulty elektrotechniky
a informatiky Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Predkladateľ: Ing. Denis Vasko

Ústav robotiky a kybernetiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Ilkovičova 3, 841 04 Bratislava

Školiteľ: doc. Ing. Eva Miklovičová, PhD.

Ústav robotiky a kybernetiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Ilkovičova 3, 841 04 Bratislava

Oponenti: doc. Ing. Anna Simonová, PhD.

Katedra mechatroniky a elektroniky
Fakulta elektrotechniky
a informačných technológií
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

prof. Ing. Michal Kelemen, PhD.

Ústav automatizácie, mechatroniky, robotiky
a výrobnéj techniky
Katedra priemyselnej automatizácie
a mechatroniky
Strojnícka fakulta
Technická univerzita v Košiciach
Park Komenského 8, 042 00 Košice



Autoreferát bol rozoslaný:

**Obhajoba dizertačnej práce sa bude konať dňa 21.8.2025
o 9:00 h na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU
v Bratislave, Ilkovičova 3, 841 04 Bratislava, v miestnosti D424.**

prof. Ing. Vladimír Kutiš, PhD.
dekan FEI STU v Bratislave

Abstrakt

V práci sa zaoberáme metódami návrhu robustných regulátorov, ktoré je možné zaradiť medzi algoritmy riadenia s premenlivou štruktúrou. Podstatu týchto metód tvorí zmena štruktúry riadenia podľa hodnoty procesných premenných za účelom kombinácie výhodných vlastností jednotlivých štruktúr. Predpokladáme, že riadený systém je opísaný diferenciálnou inklúziou, ktorá opisuje neurčitú dynamiku riadeného systému. Uvádzame tzv. metódu neurčitých lineárnych množín, ktorá poskytuje štrukturovaný prístup syntézy robustných regulátorov. Metódu neurčitých lineárnych množín kombinujeme s originálnou metódou, ktorá využíva tzv. čiastočne invertovateľné relácie, ktorými je možné niektoré neinvertovateľné vstupné relácie (charakteristiky) nahradiť invertovateľnými reláciami. Neurčité vstupno-výstupné závislosti komponentov systému aproximujeme invertovateľnou funkciou a príslušnou odchýlkou inverzie. Na aproximáciu využívame invertovateľnú umelú neurónovú sieť. Opisujeme metódu nastavenia parametrov minimalizáciou uniformnej normy odchýlky výstupu umelej neurónovej siete. V práci uvádzame dve originálne prepínacie funkcie, tzv. saturovanú nesusingulárnu prepínaciu funkciu s konvergenciou v konečnom čase a saturovanú prepínaciu funkciu s rozšíreným gradientom. Uvedené prístupy kombinujeme do jednej metódy robustného riadenia, experimentálne overujeme na laboratórnom modeli jednorozmerného systému s neurčitostami a externou poruchou, rozširujeme na prípad viacrozmerých systémov a výsledný algoritmus overíme aj využitím numerických simulácií riadenia manipulátora s nelineárnymi vstupnými funkciami.

Kľúčové slová: robustné riadenie, kľzavý režim, stabilita, kvázistabilita, Ljapunovova priama metóda, obmedzenie rýchlosti, robotické manipulatory, MIMO systémy

Abstract

In this thesis, we introduce several variable structure controllers, as well as a method of synthesis of such controllers. The main idea of variable structure control is control structure switching with the goal of combining the advantages of each particular control structure. We assume that the plant is described by differential inclusions, which capture the underlying model uncertainty. We describe the method of uncertain linear sets, which enables robust controller synthesis. This method is combined with an original method that uses the notion of partially invertible relations or approximate inverses. Non-invertible relations are replaced by invertible functions. The error that this change introduces is treated as disturbance and is compensated using the robust controller. We approximate non-invertible relations using an invertible artificial neural network. We describe the structure of this network and introduce a method of parameter tuning where the objective function is the uniform norm of the network error. We also describe the saturated nonsingular terminal switching function and introduce the saturated nonsingular terminal switching function with extended gradient. Finally, we combine the previous methods, synthesize controllers and verify the resulting control law experimentally, using a laboratory model of a single degree of freedom with parametric and external disturbances, and simulatively, using a system with multiple inputs and outputs.

Keywords: robust control, sliding mode control, stability, quasi-stability, Lyapunov's direct method, speed error limitation, robotic manipulators, MIMO systems

Obsah

Úvod	8
1 Prehľad súčasného stavu problematiky	9
2 Vymedzenie problematiky a ciele dizertačnej práce	12
3 Množiny riešení postačujúcich podmienok stability a kvality riadenia	13
3.1 Lineárne množiny	13
3.2 Neurčité lineárne množiny	14
3.3 Súčasné riešenie vektorového systému postačujúcich podmienok	15
3.4 Rekurzívne riešenie vektorového systému postačujúcich podmienok	16
4 Robustné riadenie systémov s čiastočne invertovateľnými vstupnými reláciami	18
5 Invertovateľný neuro-aproximátor	19
5.1 Štruktúra aproximátora	19
5.2 Inverzný aproximátor	19
5.3 Kriteriálna funkcia uniformnej normy odchýlky	20
6 Saturované prepínacie funkcie a obmedzenie rýchlosti	21
6.1 Saturované prepínacie funkcie	21
6.2 Problém necitlivosti derivácie hodnoty prepínacej funkcie v čase vzhľadom na riadenie a jeho riešenie	23
7 Experimentálne overenie výsledkov	24
7.1 Odhad parametrov riadeného systému	24
7.2 Návrh robustného regulátora s čiastočne invertovateľnou vstupnou závislosťou a obmedzením rýchlosti	26
7.3 Testovanie robustného riadenia	27
7.4 Porovnanie s PD regulátorom	29

7.5 Porovnanie s ETSO robustným regulátorom s obmedzením rýchlosti odchýlky	30
8 Robustné riadenie viacrozmerných systémov	33
8.1 Viacrozmerné čiastočne invertovateľné vstupné relácie . .	33
8.2 Model manipulátora a postačujúca inklúzia pre stabilitu a konvergenciu hodnôt prepínacích funkcií	34
8.3 Návrh riadenia	35
8.4 Riadenie manipulátora	38
8.5 Simulačné overenie riadenia MIMO systému	39
9 Prínos autora k problematike	41
Záver	42
Literatúra	43

Úvod

Návrh riadenia dynamických systémov sa vždy uskutočňuje v kontexte viac alebo menej známeho modelu riadeného systému. Medzi modelom a skutočným procesom existuje nezhoda, ktorá je zapríčinená nemodelovanými časťami systému, poruchovými signálmi s neznámym priebehom v čase, konečnou presnosťou identifikácie parametrov a pod. Pri syntéze regulátorov je možné zanedbať dané *neurčitosti*, ale ignorovanie poruchových signálov a nepresností identifikácie môže zhoršiť kvalitu riadenia a spôsobiť výrazné odchýlky medzi priebehmi riadenej veličiny získanými simuláciou a jej reálnym priebehom.

Robustný návrh riadenia berie do úvahy nedostatky modelovania a vplyvy neurčitostí a porúch. Ak má byť riadenie *robustné* voči všetkým zmieneným vplyvom, t. j. ak má riadenie zachovať aspoň návrhárom určenú minimálnu kvalitu, potom je nutné vykonať syntézu regulátora a dokázať stabilitu a kvalitu riadenia pre celú množinu hodnôt parametrov systému a poruchových signálov.

Zaoberáme sa metódami návrhu robustných regulátorov, ktoré je možné zaradiť medzi algoritmy *riadenia s premenlivou štruktúrou* [1] (angl. Variable Structure Control, VSC). Niektoré zo základných prác z tejto oblasti boli publikované v 70. rokoch 20. storočia V. Utकिनom [2].

V regulačných obvodoch s riadením s premenlivou štruktúrou môže dôjsť ku vzniku tzv. *kľavého režimu* (KR). V kľavom režime je diferenciálna rovnica systému predpísaná návrhárom a je nezávislá od porúch, takže kvalita riadenia je *invariantná* voči poruchám.

Robustné riadenie s (kvázi)kľavým režimom je vhodným kandidátom pre aplikácie so systémami s výraznými poruchami, ako sú napríklad podmorské plavidlá [3], robotické ramená [4] a končatiny [5], exoskelety [6], lietajúce [7], kozmické [8] a námorné systémy [9], mobilné podvozky [10], robotické systémy v zdravotníctve [11], pohybové systémy vo všeobecnosti [1], jednosmerné meniče napätia [12], systémy skladovania energie [13], fotovoltaičné systémy [14], indukčné generátory [15], napäťové striedače [16], systémy riadenia hladiny kvapaliny v nádržiach [17], systémy riadenia množstva glukózy v krvi [18] a pod. Robustnosť je možné využiť aj na zjednodušenie návrhu regulátora náhradou zložitých nelineárnych funkcií v modeloch riadených systémov jednoduchšími funkciami [19].

V posledných rokoch sa klasické metódy nelineárneho riadenia kombinovali s rôznymi algoritmami a štruktúrami *výpočtovej inteligencie*. Ide o algoritmy z oblasti optimalizácie, ako napríklad *gradientový zostup*, alebo *bio-inšpirované optimalizačné postupy* [20], napr. *genetický algoritmus* [21]. Pod štruktúrami výpočtovej inteligencie máme na mysli najmä *umelé neurónové siete* (UNS) [22] a *fuzzy systémy* (FS) [15].

1 Prehľad súčasného stavu problematiky

Základné pojmy z teórie riadenia vysvetľujeme na príklade systému druhého rádu s polohovou súradnicou x , rýchlosťou $\dot{x}$, zrýchlením $\ddot{x}$, referenčnými premennými $r, \dot{r}$ a $\ddot{r}$ a hnacím momentom u , $e = r - x$ je regulačná odchýlka. Cieľom riadenia je dostatočne rýchla konvergencia regulačnej odchýlky e k nule. Množina $E \times \dot{E}$ je rovina dvojíc $\mathbf{q} = [e; \dot{e}]$.

Množina dvojíc $[e; \dot{e}]$, ktoré vyhovujú rovnici $\dot{e} + \alpha e = 0$, $\alpha > 0$, je priamkou v rovine $E \times \dot{E}$, ktorú označujeme ako Σ_0 . Na priamke Σ_0 platí $\dot{e} = -\alpha e$, takže $e(t)$ konverguje k nule s exponenciálnou obálkou $|e| \leq |e(0)|\exp(-\alpha t)$ [23]. Z uvedeného vyplýva, že cieľ riadenia možno dosiahnuť obmedzením fázovej trajektórie $[e(t); \dot{e}(t)]$ pre $t > t_0$ na danú priamku, čo je možné dosiahnuť zabezpečením konvergencie hodnoty $\sigma = \alpha e + \dot{e}$ k hodnote 0, napríklad využitím *Ljapunovovej priamej metódy* [24]. Napríklad je možné Ljapunovovu funkciu definovať ako $v = \sigma^2/2$. Riadenie je navrhnuté tak, aby hodnota v konvergovala k 0, t. j. aby zastupujúci bod systému konvergoval na priamku Σ_0 . Ak trajektória zastupujúceho bodu kopíruje priamku Σ_0 , potom je systém v tzv. *kľzavom režime*. Ak riadenie zabezpečuje vznik kľzavého režimu, potom ide o riadenie s kľzavým režimom [2] (angl. Sliding Mode Control, SMC). V okolí priamky Σ_0 môžu nastať prudké zmeny vektora rýchlosti zastupujúceho bodu, ktoré môžu vyvolať nežiadúce oscilácie v regulačnom obvode tzv. *chattering* [25]. Preto sa namiesto kľzavého režimu zabezpečuje tzv. *kvázikľzavý* režim, v ktorom trajektórie systému konvergujú *do okolia* priamky Σ_0 .

Klasická postačujúca podmienka existencie oblasti kľzavého režimu je vyjadrená pomocou limitných nerovností [2] ako $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \dot{\sigma} < 0$ a $\lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \dot{\sigma} > 0$, čo predstavuje podmienku existencie okolia $\sigma = 0$, na ktorom majú $\dot{\sigma}$ a σ opačné znamienka. Postačujúcu podmienku je možné zabezpečiť prepínaním štruktúry riadenia podľa znamienka funkcie σ . Funkcia

σ sa nazýva *prepínacia funkcia*, keďže štruktúra riadenia u je prepínaná podľa hodnoty (znamienka) funkcie σ . Množina Σ_0 nemusí byť priamkou. Vo všeobecnosti sa množina $\Sigma_0 = \{\mathbf{q} \text{ také, že } \sigma(\mathbf{q}) = 0\}$ nazýva *prepínacia plocha/krivka*.

Postačujúca podmienka existencie oblasti kľavého režimu v prípade vektorových polí σ je uvedená v [2]. V praxi je nutné zabezpečiť aj istú kvalitu riadenia. Využívajú sa definície asymptotickej a exponenciálnej [24] stability a konvergencie za konečnú dobu [26]. Nežiaduce oscilácie (chattering) je možné zmierniť alebo úplne odstrániť [27], pričom metóda spočíva v náhrade nespojitých častí riadenia spojitými aproximáciami [28]. Napríklad amplitúda akčného zásahu môže byť zmenšená v blízkosti prepínacej plochy Σ_0 [15].

Zákon riadenia u je možné definovať ako funkciu s nastaviteľnými parametrami $w_1, w_2, \dots, w_{n_w}$, ktoré zapisujeme spoločne ako vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$. Parametre w_i sú nastavené tzv. *zákonom adaptácie*, ktorý predpisuje deriváciu $\dot{\mathbf{w}}$ alebo nasledujúcu vzorku $\mathbf{w}[n+1]$ vektora parametrov $\mathbf{w}$. Zákon adaptácie je odvodený vzhľadom na *kritériálnu funkciu*, ktorú označujeme písmenom v .

Samotné nastavované parametre zvyčajne patria do väčšieho celku, ktorý nazývame *štruktúra výpočtovej inteligencie*. Medzi *štruktúry výpočtovej inteligencie* zaraďujeme *umelé neurónové siete* [29], *fuzzy systémy* [30] a kombinácie daných a podobných štruktúr [31], napr. štruktúru ANFIS [32]. My sa zaoberáme hlavne funkciami s nastaviteľnými parametrami, ktoré sú využívané na aproximáciu neznámych závislostí.

V literatúre sú najčastejšie uvádzané dve nezávislé možnosti využitia teórie systémov s premenlivou štruktúrou a teórie stability nelineárnych systémov na optimalizáciu parametrov štruktúr výpočtovej inteligencie.

Prvá možnosť je využitie hodnoty prepínacej funkcie σ v predpise kritéria v , napríklad $v = (\dot{\sigma} + \sigma)^2 / 2$ [33]. V ideálnom prípade v nadobudne malé hodnoty po nastavení $\mathbf{w}$. Vtedy $\dot{\sigma} = -\sigma + \varepsilon_\sigma$ pre malé ε_σ , čo postačuje na konvergenciu σ do okolia 0.

Namiesto klasických deterministických metód optimalizácie je možné využiť *bio-inšpirované optimalizačné postupy* [20], napríklad *genetický algoritmus* [34], *diferenciálnu evolúciu* [35], *netopierí algoritmus* [36] a *včelí algoritmus* [37].

Druhá možnosť využitia teórie systémov s premenlivou štruktúrou a teórie stability nelineárnych systémov na optimalizáciu parametrov štruktúr výpočtovej inteligencie je dynamická optimalizácia s kľzavým režimom [38]. Metóda pozostáva z definície prepínacej plochy, ktorá vedie systém v kľzavom režime na optimálnu trajektóriu, a zo zabezpečenia konvergenencie stavu systému na danú plochu. V kapitole 5 ukážeme využitie tejto metódy.

Ďalej opíšeme niekoľko metód kombinácie robustného riadenia s prvkami výpočtovej inteligencie, ktoré sme našli v literatúre.

V [39] sú uvedené algoritmy riadenia, v ktorých robustný regulátor zabezpečuje stabilitu a regulátor s výpočtovou inteligenciou zabezpečuje kvalitu riadenia. Výstup výpočtovej štruktúry sa pripočítava k výstupu robustného regulátora. Pri syntéze robustného regulátora je nutné považovať výstup výpočtovej štruktúry za poruchu, inak stabilita systému nemusí byť zabezpečená.

V práci [40] sme uviedli prístup, pri ktorom je aktivita výpočtovej štruktúry obmedzená do vybranej oblasti stavového priestoru Q . Výhodou prístupu je, že akčný zásah výpočtovej štruktúry nie je potrebné zohľadniť pri návrhu riadenia, ak oblasť Q správne obmedzíme.

Štruktúry výpočtovej inteligencie môžu aproximovať neznáme časti dynamiky riadeného systému [9]. Daný prístup umožňuje zmenšiť amplitúdu robustného akčného zásahu. Aproximovaná hodnota sa odpočíta od akčného zásahu s cieľom zmenšiť amplitúdu poruchy.

Zákon adaptácie je možné využiť aj na nastavenie parametrov samotného robustného regulátora [41]. Stabilita regulačného obvodu je podmienená konvergenciou parametrov regulátora.

Existujú aj prístupy, pri ktorých je celý akčný zásah výstupom štruktúry výpočtovej inteligencie. Z teórie riadenia s kľzavým režimom je odvodená len účelová funkcia [42].

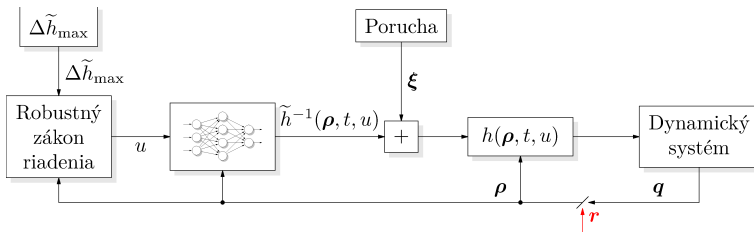
Štruktúry výpočtovej inteligencie je možné využiť aj na adaptívnu zmenu nespojitej zložky zákona riadenia. Danú skupinu metód je možné rozdeliť na dve podskupiny. Prvú podskupinu tvoria metódy, ktoré prispôsobujú amplitúdu nespojitej zložky zákona riadenia. Druhú podskupinu tvoria metódy, ktoré nahradia nespojitú funkciu sgn spojitou aproximáciou [43].

2 Vymedzenie problematiky a ciele dizertačnej práce

Pri riadení reálnych systémov sa často stretneme s oblasťami necitlivosti akčných členov alebo meničov, regulačnými odchýlkami vnútorných regulačných slučiek, a pod. V takýchto prípadoch je vhodné riadený systém reprezentovať ako diferenciálnu inklúziu, alebo ako diferenciálnu rovnicu s neznámymi signálmi, ktoré reprezentujú hodnotu porúch. Zaoberáme sa návrhom robustných regulátorov pre takýto typ nelineárnych dynamických systémov.

V práci [19] sme uviedli originálnu metódu návrhu robustného riadenia, ktorá využíva tzv. *čiastočne invertovateľné* relácie, ktorými je možné niektoré neinvertovateľné relácie nahradiť invertovateľnými reláciami. Rozdiel medzi uvažovanou invertovateľnou závislosťou a skutočnou závislosťou je pokladaný za poruchu. V tejto práci využívame poznatky z [19] a metódu rozšírime na MIMO systémy. Na aproximáciu nelinearit vyúčijeme po častiach lineárne invertovateľné umelé neurónové siete. Uvádžame metódu nastavenia parametrov minimalizáciou uniformnej normy odchýlky UNS.

Uvedené prístupy skombinujeme do jedného zákona riadenia. Principiálna regulačná schéma takejto kombinácie robustného regulátora s prvkami výpočtovej inteligencie je na obrázku 2.1.



Obrázok 2.1. Bloková schéma robustného riadenia jednorozmerného systému s približnou inverznou funkciou $\tilde{h}^{-1}(u)$ a invertovateľným neuro-aproximátorom.

Vektor ρ predstavuje vektor procesných premenných, ktorý obsahuje fázový vektor q , referenčný signál r a iné potrebné premenné. Závislosť h od riadiaceho signálu u obsahuje neurčité zložky, t. j. nie je možné určiť presnú hodnotu h pre zvolené u . Funkcia $\tilde{h}^{-1}$ predstavuje odhad funkcie h^{-1} . Uvedený algoritmus je možné kombinovať s rôznymi

tvarmi prepínacej funkcie.

Robustné riadenie s kváziklzávým režimom je možné využiť na obmedzenie rýchlosti v pohybových systémoch [44] kvôli bezpečnosti a integrite procesu riadenia, čo znižuje nutnú rezervu v akčnom zásahu. Uvádzame dve nové originálne prepínacie funkcie s obmedzením rýchlosti odchýlky, ktoré využijeme pri odvádzaní robustného zákona riadenia na obrázku 2.1.

Odvođený zákon riadenia dekomponovaných jednorozmerných systémov experimentálne overíme a rozšírime aj na prípad viacrozmerných systémov. Výsledky overíme využitím numerických simulácií riadenia manipulátora s tuhými článkami s nelineárnymi vstupnými funkciami.

Cieľom tejto práce je splnenie úloh zo zadania dizertačnej práce, formulovaných v týchto štyroch bodoch:

1. Analyzujte možnosti využitia teórie systémov s premenlivou štruktúrou a teórie stability nelineárných systémov na optimalizáciu parametrov štruktúr výpočtovej inteligencie.
2. Navrhňte robustnú metódu riadenia nelineárných MIMO pohybových systémov, ktorá bude kombinovať VS riadenie s prístupmi z oblasti výpočtovej inteligencie.
3. Vyšetrite vlastnosti navrhnutej metódy riadenia a porovnajte tieto vlastnosti s vlastnosťami vybraných algoritmov riadenia bez výpočtovej inteligencie.
4. Odvođené algoritmy riadenia overte na laboratórnom modeli pohybového systému a výsledky zdokumentujte.

3 Množiny riešení postačujúcich podmienok stability a kvality riadenia

3.1 Lineárne množiny

V práci vyjadrujeme množiny riešení niekoľkých postačujúcich podmienok stability a kvality riadenia pomocou tzv. lineárnych množín, ktoré definujeme nasledovne. Nech dvojica v tvare $[[\mathbf{b}; c]] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ reprezentuje *polpriestor* $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \text{ pre ktoré } \mathbf{b}^T \mathbf{a} \geq c\}$ [45]. Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ nazývame *osový vektor* a $c \in \mathbb{R}$ *posunutie* polpriestoru pozdĺž vektora $\mathbf{b}$. Množiny A tvorené prienikom polpriestorov $\cap_{i=1}^k [[\mathbf{b}_i; c_i]]$ nazývame *lineárne množiny*. Lineárnu množinu je možné reprezentovať ako dvojicu

$\llbracket \mathbf{B}; \mathbf{c} \rrbracket$, kde $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_k]$ je *matica osí* a $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_k]^T$ je *vektor posunutí*. Množinu $\llbracket \mathbf{B}; \mathbf{c} \rrbracket$ je možné zapísať aj ako sústavu nerovností v tvare $\mathbf{B}^T \mathbf{a} \geq \mathbf{c}$. Platia ekvivalencie

$$\bigcap_{i=1}^k \llbracket \mathbf{b}_i; c_i \rrbracket = \llbracket \mathbf{B}; \mathbf{c} \rrbracket = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \text{ také, že } \mathbf{B}^T \mathbf{a} \geq \mathbf{c}\}. \quad (3.1)$$

Uvádžame niekoľko príkladov podmienok stability a kvality riadenia, ktoré je možné zapísať v tvare lineárnej množiny. Podmienku Ljapunovovej stability $\dot{v} \leq 0$ pre $v = \|\boldsymbol{\sigma}\|$ je možné zapísať v tvare $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\sigma} / \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq 0$ a množina riešení danej nerovnosti je polpriestor $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \in \dot{\Theta} = \llbracket -\boldsymbol{\sigma}; 0 \rrbracket$. Množina riešení podmienky exponenciálnej konvergenie $\dot{v} \leq -\beta v$, kde $\beta > 0$ [24], je $\dot{\Theta} = \llbracket -\boldsymbol{\sigma}; \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \rrbracket$. Množina riešení podmienky konvergenie za konečný čas $\dot{v} \leq -\beta v^\lambda$, kde $0 < \lambda < 1$ [26], je polpriestor $\dot{\Theta} = \llbracket -\boldsymbol{\sigma}; \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^{\lambda+1} \rrbracket$, čo vieme zapísať aj ako $\dot{\Theta} = \llbracket -\boldsymbol{\sigma}; \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\lambda \rrbracket$ pre $\beta > 0$ a $1 < \lambda < 2$. Množiny riešení postačujúcich podmienok stability a konvergenie $d\|\boldsymbol{\sigma}\|/dt \leq 0$, $d\|\boldsymbol{\sigma}\|/dt \leq -\mathbb{B} \mathbf{1}$ a $d\|\boldsymbol{\sigma}\|/dt \leq -\mathbb{B} \|\boldsymbol{\sigma}\|$, kde $\mathbb{B} = \text{diag}(\beta_i)_{i=1}^n$, $\beta_i > 0$, je takisto možné reprezentovať dvojicami v tvare $\llbracket \mathbf{B}; \mathbf{c} \rrbracket$.

3.2 Neurčité lineárne množiny

Matica $\mathbf{B}$ osových vektorov a vektor posunutí $\mathbf{c}$ môžu byť neurčité. Preto formalizmus rozširujeme aj na prípady, kedy matica osí $\mathbf{B}$ alebo vektor posunutí $\mathbf{c}$ obsahuje neurčité zložky. Výsledky využijeme pri návrhu robustného riadenia v ďalších častiach práce.

Nech $\mathbf{B} \in \tilde{\mathbf{B}} + \Delta \tilde{\mathbf{B}}$ a $\mathbf{c} \in \tilde{\mathbf{c}} + \Delta \tilde{\mathbf{C}}$, kde $\tilde{\mathbf{B}}$ a $\tilde{\mathbf{c}}$ sú odhadmi matice $\mathbf{B}$ a vektora $\mathbf{c}$ a množiny $\Delta \tilde{\mathbf{B}}$ a $\Delta \tilde{\mathbf{C}}$ sú množinami neurčitosti odhadov. *Neurčité lineárne množiny* sú štvorce $\llbracket \tilde{\mathbf{B}}; \tilde{\mathbf{c}}; \Delta \tilde{\mathbf{B}}; \Delta \tilde{\mathbf{C}} \rrbracket$, pričom

$$\tilde{\mathbf{a}} \in \llbracket \tilde{\mathbf{B}}; \tilde{\mathbf{c}}; \Delta \tilde{\mathbf{B}}; \Delta \tilde{\mathbf{C}} \rrbracket \iff (\tilde{\mathbf{B}} + \Delta \tilde{\mathbf{B}})^T \tilde{\mathbf{a}} \geq \tilde{\mathbf{c}} + \Delta \tilde{\mathbf{c}} \text{ pre všetky } \Delta \tilde{\mathbf{B}} \in \Delta \tilde{\mathbf{B}}, \Delta \tilde{\mathbf{c}} \in \Delta \tilde{\mathbf{C}}. \quad (3.2)$$

Neurčité lineárne množiny označujeme ako $\tilde{A}$. Množinu $\tilde{A} = \llbracket \tilde{\mathbf{B}}; \tilde{\mathbf{c}}; \Delta \tilde{\mathbf{B}}; \Delta \tilde{\mathbf{C}} \rrbracket$ je možné zapísať v tvare prieniku polpriestorov

$$\tilde{A} = \bigcap_{\Delta \tilde{\mathbf{B}} \in \Delta \tilde{\mathbf{B}}} \bigcap_{\Delta \tilde{\mathbf{c}} \in \Delta \tilde{\mathbf{C}}} \bigcap_{i=1}^n \llbracket \tilde{\mathbf{b}}_i + \Delta \tilde{\mathbf{b}}_i; c_i + \Delta c_i \rrbracket, \quad (3.3)$$

kde i je index stĺpcov $\tilde{\mathbf{b}}_i$ a $\Delta \tilde{\mathbf{b}}_i$ matíc $\tilde{\mathbf{B}}$ a $\Delta \tilde{\mathbf{B}}$ a elementov c_i a Δc_i vektorov $\mathbf{c}$ a $\Delta \tilde{\mathbf{c}}$.

Množina $\tilde{A} = \llbracket \tilde{\mathbf{b}}; \tilde{c}; \Delta\tilde{\mathbf{B}}; \Delta\tilde{C} \rrbracket$, kde $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ a $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, tvorí dôležitý prípad neurčitej lineárnej množiny, pretože ostatné neurčité lineárne množiny je možné vyjadriť prienikom takýchto množín podľa (3.3). Ak platia predpoklady 3.1 a 3.2 množina $\tilde{A}$ nebude prázdna.

Predpoklad 3.1. *Existujú konštanty $\|\Delta\tilde{\mathbf{b}}\|_{\max}$ a $\|\Delta\tilde{c}\|_{\max}$, pre ktoré platí, že pre všetky $\Delta\tilde{\mathbf{b}} \in \Delta\tilde{\mathbf{B}}$ a všetky $\Delta\tilde{c} \in \Delta\tilde{C}$ platí $\|\Delta\tilde{\mathbf{b}}\| \leq \|\Delta\tilde{\mathbf{b}}\|_{\max}$ a $\|\Delta\tilde{c}\| \leq \|\Delta\tilde{c}\|_{\max}$.*

Predpoklad 3.2. *Nech $\|\Delta\tilde{\mathbf{b}}\|_{\max} < \|\tilde{\mathbf{b}}\|$.*

Nech $\lceil x \rceil$ predstavuje horné ohraničenie x . Element v tvare

$$\tilde{\mathbf{a}}_0 = \tilde{\mathbf{b}} \left[\frac{\tilde{c} + \Delta\tilde{C}}{(\tilde{\mathbf{b}} + \Delta\tilde{\mathbf{B}})^T \tilde{\mathbf{b}}} \right], \quad (3.4)$$

je elementom $\tilde{A} = \llbracket \tilde{\mathbf{b}}; \tilde{c}; \Delta\tilde{\mathbf{B}}; \Delta\tilde{C} \rrbracket$. Vektor $\tilde{\mathbf{a}}_0$ nazývame *suboptimálne bazálne riešenie*. Ak vo výraze nahradíme horné ohraničenie skutočnou hodnotou $(\tilde{c} + \Delta\tilde{C}) / (\tilde{\mathbf{b}} + \Delta\tilde{\mathbf{B}})^T \tilde{\mathbf{b}}$, potom dostaneme optimálne riešenie $\tilde{\mathbf{a}}_{\text{opt}}$. Je možné dokázať, že posunutý kužeľ

$$\tilde{A}_c = \tilde{\mathbf{a}}_0 + p_0 \left[\hat{\tilde{\mathbf{b}}} + \frac{1}{b_c} N_{c, \perp \tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{0}; 1) \right] \text{ pre } p_0 \in [0; \infty), \quad (3.5)$$

je podmnožinou $\tilde{A}$, kde $N_{c, \perp \tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{0}; 1)$ je jednotková guľa kolmá na $\tilde{\mathbf{b}}$. Uhol kužeľa je

$$\theta_c = \text{atan}(b_c). \quad (3.6)$$

Množina $\tilde{A}_c$ je *posunutý kužeľ s vrcholom v bode $\tilde{\mathbf{a}}_0$, s osovým vektorom $\tilde{\mathbf{b}}$ a uhlom θ_c* , čo zapisujeme ako $\tilde{A}_c = \tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}; \theta_c; \|\tilde{\mathbf{a}}_0\|)$.

3.3 Súčasné riešenie vektorového systému postačujúcich podmienok

Z definície (3.2) platí, že $\tilde{\mathbf{a}} \in \tilde{A} = \llbracket \tilde{\mathbf{B}}; \tilde{c}; \Delta\tilde{\mathbf{B}}; \Delta\tilde{C} \rrbracket$ vtedy a len vtedy, keď

$$(\tilde{\mathbf{B}} + \Delta\tilde{\mathbf{B}})^T \tilde{\mathbf{a}} \geq \tilde{c} + \Delta\tilde{C}. \quad (3.7)$$

Danú nerovnosť je možné považovať za n nerovností v tvare

$$(\tilde{\mathbf{b}}_i + \Delta\tilde{\mathbf{B}}_i)^T \tilde{\mathbf{a}} \geq \tilde{c}_i + \Delta\tilde{C}_i, \quad (3.8)$$

pre $i \in \{1, \dots, n\}$, kde $\tilde{\mathbf{b}}_i$ je i -ty stĺpec matice $\tilde{\mathbf{B}}$ a c_i je i -ty element vektora $\mathbf{c}$. Aby $\tilde{\mathbf{a}} \in \tilde{A}$, kde $\tilde{A}$ je množina riešení (3.7), je nutné a zároveň postačujúce, aby pre $i \in \{1, \dots, n\}$ platila nerovnosť (3.8). Každá z nerovností (3.8) má množinu kužeľovitú podmnožinu riešení v tvare (3.5). Na zabezpečenie platnosti (3.7) je nutné nájsť element z prieniku daných kužeľov. Príkladom takýchto riešení sú riešenia na osi

$$\tilde{\mathbf{b}}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\mathbf{b}}_i}{\|\tilde{\mathbf{b}}_i\|}. \quad (3.9)$$

Ak predpokladáme riešenie v tvare $\tilde{\mathbf{a}}_s = k_s \tilde{\mathbf{b}}_s$, potom amplitúdu k_s postačuje zvoliť podľa

$$k_s \geq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{\sin(\theta_{i,c})}{\sin\left[\theta_{i,c} - \arccos\left[\frac{\tilde{\mathbf{b}}_s^T \tilde{\mathbf{b}}_i}{\|\tilde{\mathbf{b}}_s\| \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|}\right]\right]} \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}_i\|}{\|\tilde{\mathbf{b}}_s\|} \left[\frac{\tilde{c}_i + \Delta \tilde{C}_i}{(\tilde{\mathbf{b}}_i + \Delta \tilde{B}_i)^T \tilde{\mathbf{b}}_i} \right]. \quad (3.10)$$

Namiesto riešenia $\tilde{\mathbf{a}}_s$ je možné zvoliť aj riešenie v tvare $\tilde{\mathbf{a}}_{s,2} = k_{s,2} \tilde{\mathbf{b}}_{s,2}$, kde

$$\tilde{\mathbf{b}}_{s,2} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1,T} \left(\sqrt{\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}} \right) \mathbf{1}. \quad (3.11)$$

Takáto voľba $\tilde{\mathbf{a}}_{s,2}$ predstavuje vektor, ktorý zvierá rovnaký uhol so všetkými osovými vektormi $\tilde{\mathbf{b}}_i$.

3.4 Rekurzívne riešenie vektorového systému postačujúcich podmienok

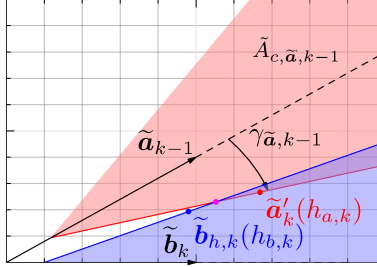
Na zabezpečenie platnosti (3.8) pre $i = 1$ postačuje zvoliť vektor $\tilde{\mathbf{a}}$ ako vektor $\tilde{\mathbf{a}}_1$ v tvare

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{b}_1 \max \left\{ \left[\frac{\tilde{c}_1 + \Delta \tilde{C}_1}{(\tilde{\mathbf{b}}_1 + \Delta \tilde{B}_1)^T \tilde{\mathbf{b}}_1} \right], 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Kužeľ $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},1} = \tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_1; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},1}; \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|)$ s osovým vektorom $\tilde{\mathbf{b}}_1$, posunutím $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|$ a uhlom $\gamma_{\tilde{\mathbf{a}},1} = \theta_{1,c}$ (podľa (3.6)) obsahuje riešenia (3.8) pre $i = 1$.

Ak $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k-1}; \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\|)$ je kužeľ riešení (3.8) pre $i = \{1, \dots, k-1\}$, tak na hranici kužeľa $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},k-1} = \tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k-1}; \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\|)$ v rovine vektorov $\tilde{\mathbf{b}}_k$ a $\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$ je možné nájsť vrchol kužeľa $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},k} = \tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{a}}_k; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k};$

$\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|$) riešení (3.8) pre $i = \{1, \dots, k\}$. Vrchol kužeľa $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},k}$ je v bode, kde hranica kužeľa $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},k-1}$ pretína kužeľ $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_k; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k}; \|\tilde{\mathbf{a}}_k\|)$ riešení k -tej nerovnosti (3.8). Vid' obrázok 3.1, na ktorom je daný bod označený fialovou bodkou.



Obrázok 3.1. Kužeľ riešení k -tej nerovnosti (3.8) (modrý kužeľ) a $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},k-1}$ (červený kužeľ).

Nech $\mathbf{R}(\theta_x)$ je matica pravotočivej rotácie o uhol θ_x v rovine, $\mathbf{M}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cos[\varphi(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{b}}_k)] \\ 0 & \sin[\varphi(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{b}}_k)] \end{bmatrix}$ a $\mathbf{P}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_k & \tilde{\mathbf{a}}_{k-1} \\ \|\tilde{\mathbf{b}}_k\| & \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\| \end{bmatrix}$, kde $\varphi(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{b}}_k)$, je uhol medzi vektormi $\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$ a $\tilde{\mathbf{b}}_k$ daný ako $\varphi(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{b}}_k) = \arccos(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}^T \tilde{\mathbf{b}}_k / \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\| \|\tilde{\mathbf{b}}_k\|)$. Bod $\tilde{\mathbf{a}}'_k$ na hranici červeného kužeľa na obrázku 3.1 je

$$\tilde{\mathbf{a}}'_k(h_{a,k}) = \mathbf{P}_{k,k-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\| \end{bmatrix} + \mathbf{R}(-\gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k-1}) \mathbf{M}_{k,k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ h_{a,k} \end{bmatrix} \right), \quad (3.13)$$

kde $h_{a,k} \geq 0$. Vo fialovom bode na obrázku 3.1 platí

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{k,k-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\| \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \mathbf{R}(-\gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k-1}) \mathbf{M}_{k,k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ h_{a,k} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{P}_{k,k-1} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{b}}_k\| \left[\frac{\tilde{c}_k + \Delta \tilde{C}_k}{(\tilde{\mathbf{b}}_k + \Delta \tilde{\mathbf{B}}_k)^T \tilde{\mathbf{b}}_k} \right] \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{R}(\theta_{k,c}) \mathbf{M}_{k,k-1} \begin{bmatrix} h_{b,k} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pravá strana rovnice reprezentuje bod $\tilde{\mathbf{b}}_{h,k}(h_{b,k})$ a ľavá strana bod $\tilde{\mathbf{a}}'_k(h_{a,k})$. Vrchol $\tilde{\mathbf{a}}_k$ kužeľa riešení $\tilde{A}_{c,\tilde{\mathbf{a}},k}$ sústavy (3.8) pre $i = \{1, \dots, k\}$ získame zo vzťahu

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \begin{cases} \tilde{\mathbf{a}}_{k-1} & \text{ak } \tilde{\mathbf{a}}_{k-1} \in \tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{a}}'_k; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k}; \|\tilde{\mathbf{a}}'_k\|), \\ \tilde{\mathbf{a}}'_k & \text{inak,} \end{cases} \quad (3.15)$$

pričom $\tilde{\mathbf{a}}_k$ zostáva na pôvodnej hodnote $\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$, ak je pôvodná hodnota $\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$ obsiahnutá v novom kuželi $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{a}}'_k; \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k}; \|\tilde{\mathbf{a}}'_k\|)$, pretože vtedy riešenie $\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$ nie je potrebné zmeniť. Uhol nového kužeľa je

$$\gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k} = \max \{ \min \{ \theta_{k,c} + \gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k-1} - \varphi(\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{b}}_k); \pi/2 \}; 0 \}. \quad (3.16)$$

Ak $\gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k} = 0$ potom riešenie neexistuje. Súradnica $h_{a,k}$ je daná ako

$$h_{a,k} = \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}_k\| \sin(\theta_{k,c}) \left[\frac{\tilde{c}_k + \Delta \tilde{C}_k}{(\tilde{\mathbf{b}}_k + \Delta \tilde{\mathbf{B}}_k)^T \tilde{\mathbf{b}}_k} \right] + \|\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}\| \cos(\theta_{k,c})}{\sin(\gamma_{\tilde{\mathbf{a}},k})}. \quad (3.17)$$

4 Robustné riadenie systémov s čiastočne invertovateľnými vstupnými reláciami

Uvedieme metódu návrhu robustných regulátorov pre vybranú množinu systémov s nelineárnou vstupnou závislosťou, pričom využijeme tzv. čiastočne invertovateľné relácie.

Definícia 4.1. Ak pre reláciu $h(\boldsymbol{\rho}, t, u)$ platí

$$h(\boldsymbol{\rho}, t, u) \in \tilde{h}(\boldsymbol{\rho}, t, u) + \Delta \tilde{H}, \quad (4.1)$$

kde $\tilde{h}$ je invertovateľná vzhľadom na u , $\Delta \tilde{H}$ je ohraničená množina, potom h je čiastočne invertovateľná vzhľadom na u , $\tilde{h}$ je invertovateľná časť h a $\Delta \tilde{H}$ je množina odchýlok čiastočnej inverzie.

Uvádžeme nasledujúcu lemu, pomocou ktorej je možné odvodiť robustný zákon riadenia pre vybranú skupinu systémov. Lema vychádza z výsledkov, ktoré sme publikovali v práci [19].

Lema 4.1. Nech platí inklúzia

$$x^{(l)}(\boldsymbol{\rho}, t, u) \in f(\boldsymbol{\rho}, t) + h(\boldsymbol{\rho}, t, u) + \Xi, \quad (4.2)$$

kde Ξ je ohraničená množina. Nech h je čiastočne invertovateľná podľa (4.1) a nech

$$\dot{\sigma}(\boldsymbol{\rho}, t, u) = f_{\dot{\sigma}}(\boldsymbol{\rho}, t, x^{(l)}) + g_{\dot{\sigma}}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (4.3)$$

kde $f_{\dot{\sigma}}$ je invertovateľná vzhľadom na $x^{(l)}$. Potom

$$u \in \tilde{h}^{-1}[[f_{\dot{\sigma}}^{-1}(\dot{\Theta} - g_{\dot{\sigma}}) - f] \odot \Xi \odot \Delta \tilde{H}], \quad (4.4)$$

implikuje

$$\dot{\sigma} \in \dot{\Theta}. \quad (4.5)$$

Operácia $\odot$ predstavuje množinovú (morfologickú) eróziu. Pre množiny B a A platí $B \odot A = \{b \in B \text{ také, že } b + a \in B \text{ pre všetky } a \in A\}$.

5 Invertovateľný neuro-aproximátor

Uvádžeme opis štruktúry invertovateľného neuro-aproximátora, ktorý využijeme na odhad vstupnej relácie systému, inverznej štruktúry a algoritmu minimalizácie uniformnej normy odchýlky aproximátora.

5.1 Štruktúra aproximátora

Nech $u \in U$, kde U je interval, ktorý je rozdelený na n_s segmentov $U_1, U_2, \dots, U_{n_s}$, kde $U_j = [u_{j-1}; u_j]$. Tiež nech $u_{j+1} - u_j \geq u_\delta$, kde $u_\delta > 0$ je konštanta. Definujme lokálnu lineárnu aproximáciu na intervale U_j ako

$$\tilde{h}_j(u) = \begin{cases} \varphi_{j-1} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{u_j - u_{j-1}}(u - u_{j-1}) & \text{pre } j = 2, \dots, n_s, \\ \varphi_0 + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{u_1 - u_0}(u - u_0) & \text{pre } j = 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

kde φ_j, u_j pre $j = 0, \dots, n_s$ sú konštanty a predstavujú parametre funkcií $\tilde{h}_j$. Celkovú aproximáciu $\tilde{h}$ definujme ako $\tilde{h}(u) = \tilde{h}_j(u)$ pre $u \in U_j$. Funkciu $\tilde{h}$ je možné interpretovať ako umelú neurónovú sieť.

5.2 Inverzný aproximátor

Ak $k_j \neq 0$, potom $\tilde{h}_j$ je invertovateľná na U_j a inverzná funkcia $\tilde{h}_j^{-1}$ je definovaná na obore

$$\Phi_j = \begin{cases} [\varphi_{j-1}; \varphi_j] & \text{ak } k_j > 0, \\ [\varphi_j; \varphi_{j-1}] & \text{ak } k_j < 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Inverziou (5.1) dostaneme

$$\tilde{h}_j^{-1}(\varphi) = \begin{cases} u_{j-1} + \frac{u_j - u_{j-1}}{\varphi_j - \varphi_{j-1}}(\varphi - \varphi_{j-1}) & \text{pre } j = 2, \dots, n_s, \\ u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\varphi_1 - \varphi_0}(\varphi - \varphi_0) & \text{pre } j = 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Ak $\text{sgn}(k_i) = \text{sgn}(k_j) \neq 0$ pre všetky i a j , tak je invertovateľná aj funkcia $\tilde{h}$. Inverzná funkcia k $\tilde{h}$ je

$$\tilde{h}^{-1}(\varphi) = \tilde{h}_j^{-1}(\varphi) \text{ pre } \varphi \in \Phi_j. \quad (5.4)$$

5.3 Kriteriaálna funkcia uniformnej normy odchýlky

Aproximácia $\tilde{h}$ závisí od vektora parametrov $\mathbf{w} = [\varphi_0, \dots, \varphi_{n_s}, u_0, \dots, u_{n_s}]^T \in \mathbb{R}^{2n_s+2}$, ktorý nastavujeme gradientovou metódou. Nech $\{\llbracket u_{(i)}; h_{(i)} \rrbracket\}_{i=1}^{n_h}$ tvorí súbor meraní, kde n_h je počet nameraných bodov. Účelovú funkciu volíme ako

$$q(\mathbf{w}) = \sum_{l \in L} \frac{1}{n_h - l + 1} \max_{i \in \{1, \dots, l\}} |\tilde{h}(\mathbf{w}, u_{(i)}) - h_{(i)}|, \quad (5.5)$$

kde $\max_{i \in \{1, \dots, l\}} |\tilde{h}(\mathbf{w}, u_{(i)}) - h_{(i)}|$ predstavuje uniformnú normu funkcie $\tilde{h}(\mathbf{w}, u_{(i)}) - h_{(i)}$ na množine $u_{(i)} \in \{u_{(1)}, \dots, u_{(l)}\}$. Tvar účelovej funkcie je zvolený s cieľom minimalizovať uniformnú normu

$$\Delta \tilde{h}_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, n_h\}} |\tilde{h}(\mathbf{w}, u_{(i)}) - h_{(i)}|, \quad (5.6)$$

ktorá sa vyskytuje v riadiacom signáli z Lemy 4.1. V práci uvádzame výrazy pre gradient ∇q funkcie (5.5).

Problém nastavenia parametrov inteligentných štruktúr je možné vnímať ako problém riadenia. Vstupné veličiny predstavujú derivácie $\dot{w}_i$ parametrov w_i inteligentnej štruktúry a výstupnú veličinu tvorí samotné kritérium q , pričom platí [46]

$$\dot{q}(\mathbf{w}) = \nabla q(\mathbf{w}) \cdot \dot{\mathbf{w}}. \quad (5.7)$$

Dynamický systém (5.7) je systémom *prvého rádu* s jedným výstupom q a viacerými vstupmi $\mathbf{w}$ (MISO). Pre daný systém navrhujeme riadenie s kľavým režimom, pričom cieľom riadenia je konvergencia hodnoty kritéria q k nule. Prepínacia funkcia je $\sigma_q(t) = q[\mathbf{w}(t)] + \alpha_q \int_0^t q[\mathbf{w}(t)] dt$, kde $\alpha_q > 0$. Zákon adaptácie parametrov je

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(0) - \int_0^t \frac{\nabla q}{\|\nabla q\|^2} \left(\alpha_q q + \beta_q \frac{\sigma_w}{2} \right) d\tau, \quad (5.8)$$

kde $\beta_q > 0$. Obmedzenia parametrov invertovateľného aproximátora zohľadňujeme obmedzením $\mathbf{w}(t)$ do vhodných oblastí.

6 Saturované prepínacie funkcie a obmedzenie rýchlosti

V tejto kapitole uvádzame originálne definície prepínacích funkcií s obmedzením rýchlosti odchýlky a konvergenciou za konečnú dobu.

6.1 Saturované prepínacie funkcie

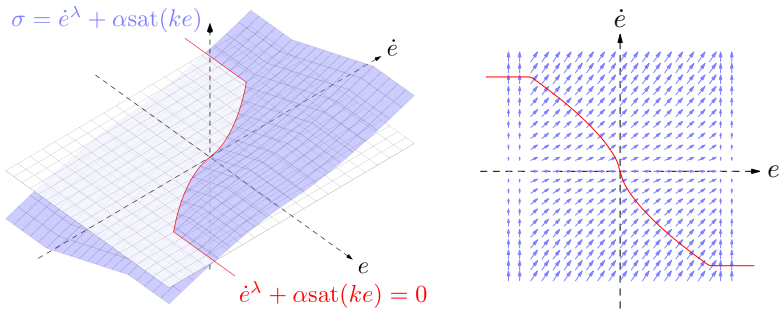
Nasledujúcu prepínaciu funkciu je možné nájsť v [44] v tvare blokovej schémy:

$$\sigma(e, \dot{e}) = \dot{e} + \alpha \text{sat}(k e) \quad (6.1)$$

kde α a k sú kladné konštanty. Danú prepínaciu funkciu budeme označovať skratkou SLSF. Saturácia výrazu $k e$ zabezpečuje obmedzenie rýchlosti odchýlky $\dot{e}$. V [47] sme definovali originálnu saturovanú prepínaciu funkciu, ktorá kombinuje vlastnosti (6.1) s konvergenciou v konečnom čase. Prepínaciu funkciu sme nazvali *saturovanú nesingulárnu prepínaciu funkciu s konvergenciou v konečnom čase* (SNTSF). Jej definícia je nasledovná

$$\sigma(e, \dot{e}) = \text{sgn}(\dot{e}) |\dot{e}|^\lambda + \alpha \text{sat}(k e), \quad (6.2)$$

kde $1 < \lambda < 2$ a kde $\alpha, k > 0$. Graf (6.2) je zobrazený na ľavej strane obrázka 6.1 a na pravej strane obrázka 6.1 je gradient $\nabla \sigma$. Všimnime si, že gradient $\nabla \sigma$ má nulový vertikálny komponent na osi e .



Obrázok 6.1. Graf skalárneho poľa (6.2) (vľavo) a gradient (6.2) (vpravo).

V [47] sme publikovali nasledujúce vety.

Lema 6.1. *Nech platí (6.2). Ak $\sigma = 0$ a $|e| > 1/k$, potom*

$$\frac{d}{dt}|e| = -\alpha^{1/\lambda}, \quad (6.3)$$

t. j. $|e|$ konverguje smerom k nule konštantnou rýchlosťou $\alpha^{1/\lambda}$.

Lema 6.2. *Nech platí (6.2). Ak $|\sigma| \leq \varepsilon_\sigma$, $|e| \geq 1/k$ a $\alpha > \varepsilon_\sigma$, potom*

$$-(\alpha + \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda} \leq \frac{d}{dt}|e| \leq -(\alpha - \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda}. \quad (6.4)$$

Lema 6.3. *Nech platí (6.2). Ak $|\sigma| \leq \varepsilon_\sigma$, $|e| < 1/k$ a $\alpha k|e| > \varepsilon_\sigma$, potom*

$$-(\alpha k|e| + \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda} \leq \frac{d}{dt}|e| \leq -(\alpha k|e| - \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda}. \quad (6.5)$$

Ak sú konštanty α a k zvolené tak, aby platili predpoklady uvedené v lemach 6.2 a 6.3, potom $d|e|/dt \leq -(\alpha k|e| - \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda}$ pre $|e| > \varepsilon_\sigma/(\alpha k)$ a pre všetky $\sigma(t) \in \Theta = [-\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\sigma]$. To postačuje na to, aby interval

$$E_\infty = \left[-\frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha k}, \frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha k} \right], \quad (6.6)$$

bol intervalom ustálenia $e(\sigma, t)$ pre $\sigma(t) \in \Theta = [-\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\sigma]$. Je možné dokázať, že ak

$$(\alpha + \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda} - (\alpha - \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda} \leq 2\varepsilon_\sigma, \quad (6.7)$$

potom ohraničenie $d|e|/dt$ je v prípade SNTSF prepínacej funkcie užšie, než v prípade saturovanej lineárnej prepínacej funkcie (6.1).

Nasledujúca lema opisuje interval ustálenia odchýlky e , ak je hodnota prepínacej funkcie SNTSF obmedzená do intervalu $\Theta = [-\varepsilon_\sigma; \varepsilon_\sigma]$.

Lema 6.4. *Nech platí $\sigma = \text{sgn}(\dot{e})|\dot{e}|^\lambda + \alpha k e$, $1 < \lambda < 2$, $\alpha > \varepsilon_\sigma > 0$, $k > 0$. Potom $E_\infty = \left[-\frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha k}; \frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha k}\right]$, je najmenším intervalom ustálenia $e(\sigma, t)$ pre $\sigma \in [-\varepsilon_\sigma; \varepsilon_\sigma]$. Lema platí aj pre prepínicu funkciu NTSF [48].*

Lema 6.4 protirečí tvrdeniam z [48] a [26] a tvrdeniam v niekoľkých iných článkoch, ktoré nesprávne uvádzajú interval $E_2 = [-\varepsilon_\sigma/(\alpha k)]^\lambda$; $[\varepsilon_\sigma/(\alpha k)]^\lambda$ ako interval, do ktorého e konverguje pre prepínicu funkciu NTSF a $\sigma \in \Theta = [-\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\sigma]$, rovnako ako to je v prípade singulárnej prepínacej funkcie s konvergenciou v konečnom čase [26].

6.2 Problém necitlivosti derivácie hodnoty prepínacej funkcie v čase vzhľadom na riadenie a jeho riešenie

Gradient prepínacej funkcie SNTSF (6.2) je $\nabla \sigma_{\text{sntsf}}(e, \dot{e}) = \left[\left(\alpha \begin{cases} k & \text{ak } |e| < 1/k \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad \lambda |\dot{e}|^{\lambda-1} \right)^T \right]$. Gradient $\nabla \sigma_{\text{sntsf}}$ je zobrazený na obrázku 6.1. Už sme poznamenali, že na vodorovnej osi je vertikálny komponent gradientu $\partial \sigma_{\text{sntsf}}/\partial \dot{e}$ nulový. Pre zvolenú triedu systémov je derivácia hodnoty prepínacej funkcie $\dot{\sigma}_{\text{sntsf}}$ necitlivá vzhľadom na signál riadenia u , ak $\partial \sigma_{\text{sntsf}}/\partial \dot{e} = 0$, takže na osi $e = 0$, nie je možné $\dot{\sigma}_{\text{sntsf}}$ ovplyvniť riadením. Gradient $\nabla \sigma_{\text{sntsf}}$ je možné porovnať s gradientom prepínacej funkcie SLSF (6.1), ktorý má tvar $\nabla \sigma_{\text{slsf}} = \left[\left(\alpha \begin{cases} k & \text{ak } |e| < 1/k \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad 1 \right)^T \right]$. V tomto prípade necitlivosť vzhľadom na riadenie nenastáva, keďže $\partial \sigma_{\text{slsf}}/\partial \dot{e} = 1$.

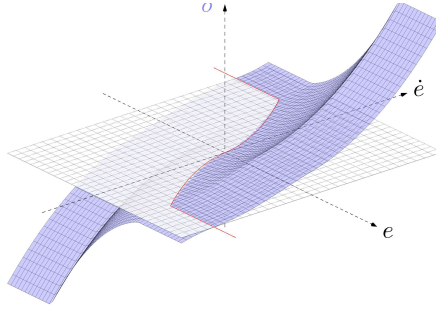
Necitlivosť derivácie σ_{sntsf} v čase vzhľadom na riadenie je možné vyriešiť úpravou prepínacej funkcie σ_{sntsf} . V práci sme odvodili prepínicu funkciu

$$\sigma(e, \dot{e}) = \sigma_{\text{sntsf}}(e, \dot{e})[p + \text{sgn}[\sigma_{\text{sntsf}}(e, \dot{e})]\sigma_{\text{slsf}}(e, \dot{e})], \quad (6.8)$$

ktorá odstraňuje necitlivosť σ_{sntsf} voči riadeniu a zároveň zachováva plochu $\sigma_{\text{sntsf}} = 0$. Hodnota p je daná výrazom $p = \alpha_{\text{sfsf}} \lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} (1 - 1/\lambda) + k_p$. Gradient (6.8) je nenulový pre $\text{sgn}(\sigma_{\text{sntsf}}) \neq 0$. Platí

$$\nabla \sigma(e, \dot{e}) = [p + \text{sgn}[\sigma_{\text{sntsf}}(e, \dot{e})] \sigma_{\text{sfsf}}(e, \dot{e})] \nabla \sigma_{\text{sntsf}}(e, \dot{e}) + |\sigma_{\text{sntsf}}(e, \dot{e})| \nabla \sigma_{\text{sfsf}}(e, \dot{e}). \quad (6.9)$$

Graf prepínacej funkcie (6.8) je na obrázku 6.2.



Obrázok 6.2. Graf prepínacej funkcie (6.8).

7 Experimentálne overenie výsledkov

Výsledky z predchádzajúcich kapitol sme spojili do jedného algoritmu robustného riadenia s výpočtovou inteligenciou, obmedzením rýchlosti odchýlky a konvergenciou v konečnom čase. Kvalitu riadenia sme experimentálne overili a porovnali s inými regulátormi.

V práci sme navrhli robustné riadenie modelu jedného stupňa voľnosti, ktorý je zložený z meniča, jednosmerného motora s konštantným cudzím budením s prevodovým mechanizmom a inkrementálneho snímača.

7.1 Odhad parametrov riadeného systému

Prenosová funkcia medzi referenčnou hodnotou momentu τ_r a uhlovou rýchlosťou $\dot{\theta}$ je

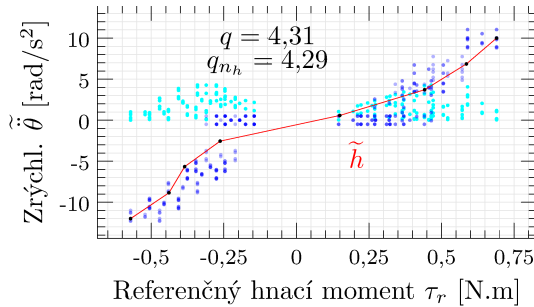
$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\tau_r(s)} = \frac{K_{\text{jsm}}}{T_{\text{jsm}}s + 1}. \quad (7.1)$$

Odhady parametrov riadeného systému sú zhrnuté v tabuľke 7.1. Hodnota R je celkový odpor obvodu rotora, j je moment zotrvačnosti motora a prevodového mechanizmu, γ je koeficient viskózneho trenia, k_r je prevodové číslo reduktora rýchlosti a C_u je konštanta motora.

Parameter	Hodnota	Jednotky	Parameter	Hodnota	Jednotky
K_{jsm}	30,55	$\frac{\text{rad}}{\text{N.m.s}}$	$u_{\max}$	12,2	V
T_{jsm}	1,662	s	C_u	0,0105	N.m.A^{-1}
k_r	131	–	γ	0,0327	N.m.s.rad^{-1}
R	2,7	Ω	j	0,0544	kg.m^2

Tabuľka 7.1. Identifikované hodnoty parametrov systému s jednosmerným motorom.

Pomocou Lemy 4.1 navrhujeme robustný regulátor polohy s obmedzením rýchlosti. Za týmto účelom je nutné odhadnúť závislosť medzi hnacím momentom τ a zrýchlením $\ddot{\theta}$. Namerali sme niekoľko dvojíc $[\tau_r; \ddot{\theta}]$. Potom sme okolo dvojíc $[\tau_r; \ddot{\theta}]$ vytvorili obdĺžniky neurčitosti, ktoré reprezentujú neurčitú polohu skutočnej charakteristiky. Na nastavenie neuro-aproximátora sme využili dvojice modrých bodov na obrázku 7.1, ktoré tvoria rohy a stredy obdĺžnikov. Výsledná invertovateľná relácia je červená krivka na obrázku 7.1.

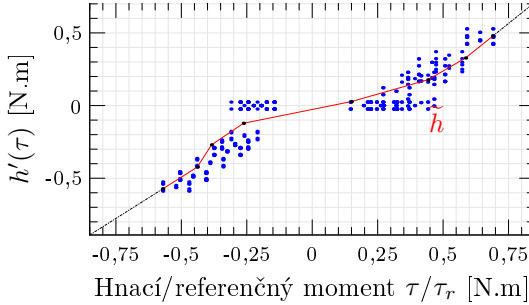


Obrázok 7.1. Invertovateľná aproximácia $\tilde{h}$ vstupnej relácie (červená krivka), namerané body $[\tau_r; \ddot{\theta}]$ (modré body), odchýlka aproximácie $\tilde{h}$ od bodov $[\tau_r; \ddot{\theta}]$ (svetlomodré body).

Hodnota q_{n_h} zodpovedá hodnote dodatočnej rezervy $\Delta\tilde{h}_{\max}$ v akčnom zásahu z Lemy 4.1, ktorá slúži na potlačenie neurčitostí vstupnej charakteristiky.

7.2 Návrh robustného regulátora s čiastočne invertovateľnou vstupnou závislosťou a obmedzením rýchlosti

Relácia h , ktorej odhad $\tilde{h}$ sme zobrazili na obrázku 7.1, závisí od momentu zotrvačnosti systému j . Funkciu $\tilde{h}$ vynásobíme odhadovanou hodnotou momentu zotrvačnosti $\tilde{j}_{\text{norm}}$, čím na vertikálnej osi dostaneme celkový moment, ktorý pôsobí na hriadeľ. Viď obrázok 7.2.



Obrázok 7.2. Odhad $\tilde{h}'(\tau) = \tilde{h}(\tau) / \tilde{j}_{\text{norm}}$.

Normalizácia hodnôt $\tilde{h}$ mení maximálnu amplitúdu $\Delta\tilde{h}_{\max}$ elementov množiny neurčitosti $\Delta\tilde{H}$. Nová hodnota $\Delta\tilde{h}'_{\max}$ je v tabuľke 7.2. Využitím lemy z kapitol 3 a 3.2 je možné odvodiť zákon riadenia v tvare

$$\tau = \tilde{h}^{-1} \left[a_1'' \begin{cases} \tilde{j} + \Delta\tilde{j}_{\max} & \text{ak } a_1'' \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{e}} \sigma \geq 0, \\ \tilde{j} - \Delta\tilde{j}_{\max} & \text{inak.} \end{cases} + \text{sgn} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{e}} \sigma \right) a_2'' \right], \quad (7.2)$$

kde $\tilde{j}$ je odhad j s maximálnou odchýlkou $\Delta\tilde{j}_{\max}$,

$$a_1'' = \frac{1}{\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{e}} \sigma} \left(\beta |\sigma|^\lambda + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{e}} \dot{e} \right) + \ddot{r} + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{j}} \dot{\theta} + \frac{1}{\tilde{j}} \text{sgn} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{e}} \sigma \right) (\xi'_{\max} + \tilde{h}'_{\max}),$$

$\tilde{\xi}'_{\max}$ je maximálny poruchový moment, $a''_2 = \Delta \tilde{j}_{\max} [\Delta \tilde{\gamma}_{\max} |\dot{\theta}| + \tilde{\xi}'_{\max} + \tilde{h}'_{\max}] / \tilde{j}$ a $\tilde{\gamma}$ je odhad γ s maximálnou odchýlkou $\Delta \tilde{\gamma}_{\max}$. Nespojité výrazy v zákone riadenia sme v ε_σ -okolí $\sigma = 0$ nahradili spojitými aproximáciami. Pre $|e| > 1/k$ je odchýlka rýchlosti $\dot{e}$ obmedzená do intervalu

$$|\dot{E}|_\infty = [-(\alpha_{\text{sfsf}}^\lambda + \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda}; -(\alpha_{\text{sfsf}}^\lambda - \varepsilon_\sigma)^{1/\lambda}], \quad (7.3)$$

podľa Lemy 6.2. Odchýlka e konverguje do intervalu ustálenia

$$E_\infty = \left[-\frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha_{\text{sfsf}}^\lambda k}; \frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha_{\text{sfsf}}^\lambda k} \right]. \quad (7.4)$$

7.3 Testovanie robustného riadenia

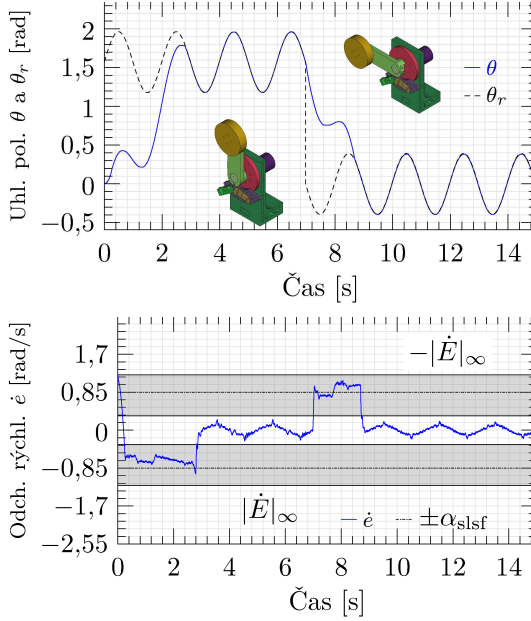
Zákon riadenia (7.2) so spojitými aproximáciami overíme experimentálne. Parametre zákona riadenia sú uvedené v tabuľke 7.2.

Parameter	α_{sfsf}	k	$\Delta \tilde{j}_{\max}$	$\Delta \tilde{\gamma}_{\max}$	$\xi'_{\max}$	λ
Hodnota	0,85	55	0,01	0,01	0,6	1,5
Jednotky	1/s	–	kg.m ²	N.m.s.rad ⁻¹	N.m	–
Parameter	β	$h'_{\max}$	ε_σ	$\Delta \tilde{h}'_{\max}$	$\tilde{j}$	$\tilde{j}_n$
Hodnota	4	$1,05 \Delta h'_{\max}$	0,6	0,16441	$\tilde{j}_n$	0,038325
Jednotky	1/s	N.m	–	N.m	kg.m ²	kg.m ²

Tabuľka 7.2. Zvolené hodnoty parametrov zákona riadenia (7.2) pri riadení uhlového natočenia systému s JSM.

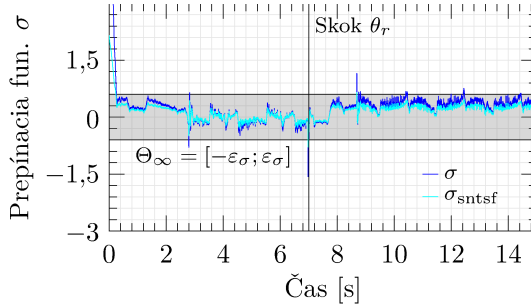
Na hriadeľ motora bola pripevnená záťaž s hmotnosťou $m_z = 0,562$ kg na ramene s dĺžkou $l_z = 0,1$ m.

Na obrázku 7.3 je priebeh uhlového natočenia hriadeľa θ a referenčnej hodnoty r (hore), priebeh odchýlky rýchlosti $\dot{e}$ (dole). Na grafe odchýlky rýchlosti sú zobrazované obmedzenia $\pm \alpha_{\text{sfsf}}$ a intervaly $\pm |\dot{E}_\infty|$ podľa (7.3).



Obrázok 7.3. Riadenie natočenia hriadeľa zaťaženého JSM so zákonom riadenia (7.2) a spojitými aproximáciami. Uhlová poloha hriadeľa a referenčná poloha (hore) a odchýlka rýchlosti (dole).

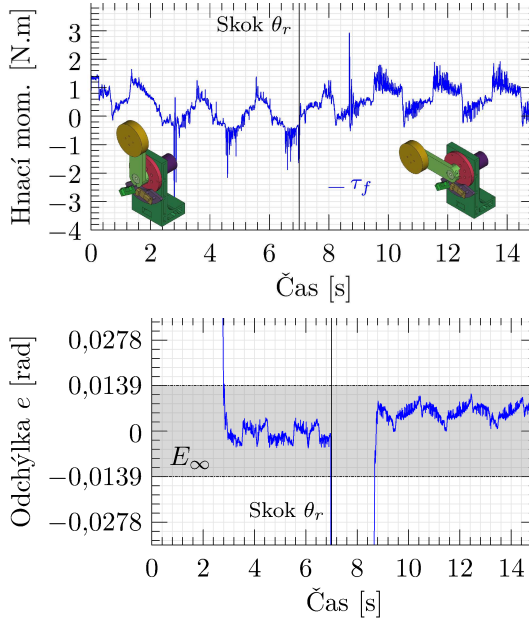
Graf na obrázku 7.4 zobrazuje priebeh prepínacej funkcie σ podľa (6.8) a σ_{sntsf} podľa (6.2).



Obrázok 7.4. Hodnoty prepínacích funkcií podľa (6.8) a (6.2).

Na obrázku 7.4 je uvedená oblasť $\Theta_{\infty} = [-\varepsilon_{\sigma}; \varepsilon_{\sigma}]$, do ktorej hodnoty

prepínacích funkcií konvergujú. V hornej časti obrázka 7.5 je priebeh momentu τ_f a v dolnej časti priebehy regulačnej odchýlky a príslušný interval ustálenia E_∞ podľa (7.4).

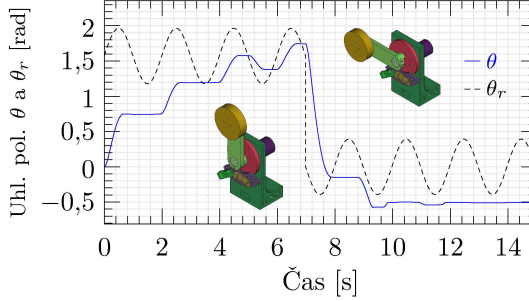


Obrázok 7.5. Hnací moment počas experimentu s premenlivou záťažou a priebeh regulačnej odchýlky polohy $e = \theta_r - \theta$ počas experimentu s premenlivou záťažou.

7.4 Porovnanie s PD regulátorom

Na porovnanie regulátorov navrhujeme klasický PD regulátor polohy metódou rozmiestnenia pólov. Nech je pred systém (7.1) zapojený PD regulátor s prenosom $g_r(s) = \tau_r(s) / e(s) = k_p + k_d s$, kde $k_p \geq 0$ a $k_d \geq 0$ sú konštanty. Referenčný tvar menovateľa prenosu uzavretého regulačného obvodu (URO) je $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$, kde ζ je koeficient útlmu a ω je pásmo priepustnosti v rad.s^{-1} . Zvolené hodnoty pásma priepustnosti ω a koeficientu útlmu ζ sú $\omega = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ a $\zeta = 1 \text{ rad}^{-1}$. Porovnaním koeficientov menovateľa prenosu URO s referenčným tvarom dostávame hodnoty parametrov $k_p = 0,4024$ a $k_d = 0,8703$. Výsledky experimentu

sú na obrázku 7.6, na ktorom sú zobrazené priebehy polohy θ a ich referenčné hodnoty θ_r . Neakceptovateľnú nedostatočnú kvalitu riadenia spôsobujú zanedbané poruchy.



Obrázok 7.6. Riadenie polohy s PD regulátorom.

7.5 Porovnanie s ETSO robustným regulátorom s obmedzením rýchlosti odchýlky

Ekvivalentné časovo-suboptimálne regulátory [49] sú robustné regulátory so spojitým akčným zásahom a kvázikľzavým režimom, a ktoré boli rozšírené aj o obmedzenie rýchlosti odchýlky [44]. ETSO zákon riadenia s obmedzením rýchlosti na hodnotu $|\dot{e}|_{\max}$ je

$$u_{\text{etso}} = \frac{1}{k_u} [(k_{\text{etso}} t_{c,\max} - 1) \dot{e} + \min \{ |\dot{e}|_{\max}, \max \{ -|\dot{e}|_{\max}, \alpha_{\text{new}} t_{c,\max} (e + \dot{e}) \} \}]. \quad (7.5)$$

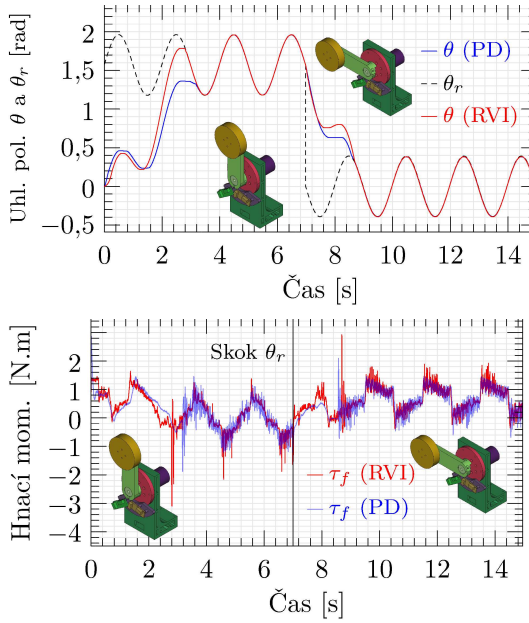
Hodnoty parametrov zákona riadenia sú uvedené v tabuľke 7.3. Postup výpočtu parametrov je opísaný v prácach [44] a [49]. Parameter $\varepsilon_{\text{etso}}$ určuje presnosť sledovania.

k_u	$t_{c,\max}$ [s]	α_{new} [s ⁻¹]	$\varepsilon_{\text{etso}}$	k_{etso}	$ \dot{e} _{\max}$
30,55	1,662	132,59	5	27	0,85

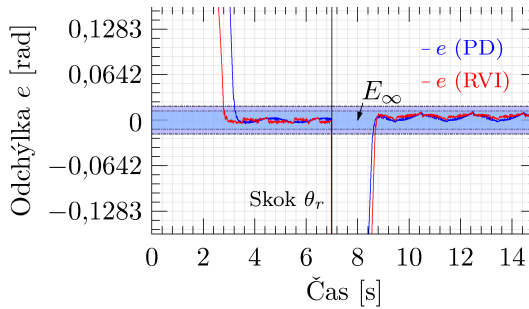
Tabuľka 7.3. Parametre ETSO regulátora s obmedzením rýchlosti.

Hodnotu $\varepsilon_{\text{etso}}$ sme určili experimentálne tak, aby presnosť sledovania referenčného signálu bola rovnaká ako v prípade regulátora s výpoč-

ovou inteligenciou (RVI). Výsledky experimentu sú na obrázkoch 7.7 a 7.8.

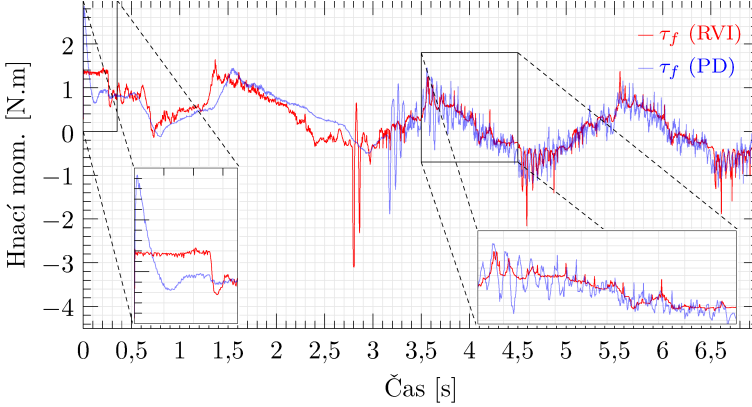


Obrázok 7.7. Porovnanie kvality riadenia ETSO spojitého robustného regulátora s obmedzením rýchlosti (PD) a regulátora s výpočtovou inteligenciou (RVI). Natočenie hriadeľa (hore) a hnací moment (dole).



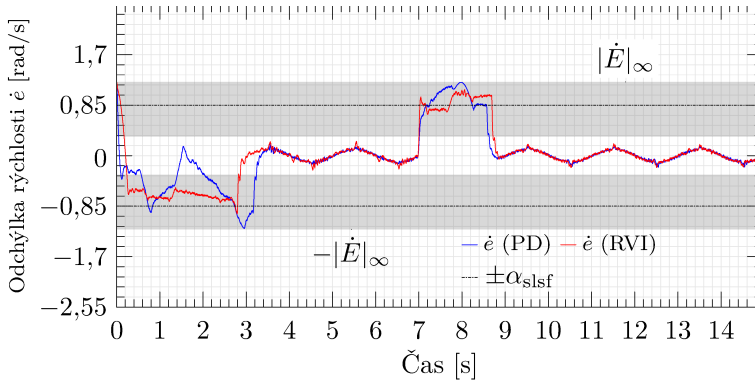
Obrázok 7.8. Porovnanie kvality riadenia ETSO spojitého robustného regulátora s obmedzením rýchlosti (PD) a regulátora s výpočtovou inteligenciou (RVI). Regulačné odchýlky.

Na priebehu regulačnej odchýlky na obrázku (7.7) je vidieť, že regulátory udržiavajú špecifikovanú presnosť sledovania.



Obrázok 7.9. Porovnanie akčného zásahu ETSO spojitého robustného regulátora s obmedzením rýchlosti (PD) a robustného regulátora s výpočtovou inteligenciou (RVI) pri sledovaní referenčného signálu vo zvislej polohe ramena.

Rezerva v akčnom zásahu ETSO regulátora je výrazne vyššia než v prípade RVI, čo vidíme na priebehoch akčného zásahu na obrázku 7.9. Prvotný skok žiadanej hodnoty výrazne zvýši amplitúdu akčného zásahu ETSO regulátora. Amplitúda akčného zásahu RVI regulátora je nižšia aj v prechodovom pásme, čo môžeme vidieť na grafe na obrázku 7.9 medzi $t = 3$ s a $t = 7$ s. Zároveň RVI zabezpečuje presnejšie ohraničenie rýchlosti odchýlky, čo možno pozorovať na grafe 7.10, kde $\alpha_{\text{slsf}} = 0,9$ je obmedzenie rýchlosti podľa Lemy 6.3.



Obrázok 7.10. Porovnanie odchýlok rýchlostí pri riadení s ETSO spojitým robustným regulátorom s obmedzením rýchlostí (PD) a pri riadení s robustným regulátorom s výpočtovou inteligenciou (RVI) pri sledovaní referenčného signálu.

8 Robustné riadenie viacrozmerných systémov

Riadiaci algoritmus z predchádzajúcej kapitoly sme rozšírili na vybranú triedu viacrozmerných systémov a overili simuláciami.

8.1 Viacrozmerné čiastočne invertovateľné vstupné relácie

Lemy z kapitol 3 a 3.2 aplikujeme na návrh riadenia robotického manipulátora. Návrh vykonáme po rozšírení definície čiastočne invertovateľných relácií z kapitoly 4.

Definícia 8.1. Ak pre reláciu $\mathbf{h}(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u})$ platí

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}) \in \tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}) + \Delta\tilde{\mathbf{H}}, \quad (8.1)$$

kde $\Delta\tilde{\mathbf{H}}$ je ohraničená množina, a kde funkcia $\tilde{\mathbf{h}}$ je invertovateľná vzhľadom na $\mathbf{u}$, potom $\mathbf{h}$ je čiastočne invertovateľná vzhľadom na $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ je invertovateľná časť $\mathbf{h}$ a $\Delta\tilde{\mathbf{H}}$ je množina odchýlok čiastočnej inverzie.

8.2 Model manipulátora a postačujúca inklúzia pre stabilitu a konvergenciu hodnôt prepínacích funkcií

Lemy z predchádzajúcich kapitol využijeme na návrh robustného riadenia manipulátora. Ako príklad predpokladajme, že dynamiku n -článkového manipulátora je možné vyjadriť inklúziou [50, 51, 52]

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\ddot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\rho}, t) \in \mathbf{h}[\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, t)] + \mathbf{z}(\boldsymbol{\rho}, t) + \Xi, \quad (8.2)$$

kde $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ je matica momentov zotrvačnosti, $\mathbf{z}(\boldsymbol{\rho}, t)$ je funkcia, ktorá obsahuje trecie, Coriolisove, odstredivé a gravitačné momenty. Množina $\Xi \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina porúch (poruchových momentov). Vektor $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ je vektor kĺbových natočení (uhlových polôh) manipulátora, $\dot{\boldsymbol{\theta}} = d\boldsymbol{\theta}/dt$ a $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = d\dot{\boldsymbol{\theta}}/dt$. Prvky množiny Ξ označujeme ako vektory $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$. Existuje $\xi_{\max}$ také, že $\xi_{\max} \geq \|\boldsymbol{\xi}\|$ pre všetky $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$. Funkcia $\mathbf{h}$ je funkcia vstupných relácií (charakteristík). Matice $\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ a $\tilde{\mathbf{J}}$ sú odhadmi matíc $\mathbf{J}^{-1}$ a $\mathbf{J}$, pričom platí $\mathbf{J}^{-1} \in \tilde{\mathbf{J}}^{-1} + \Delta\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}$ a $\mathbf{J} \in \tilde{\mathbf{J}} + \Delta\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}$, kde $\Delta\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ a $\Delta\tilde{\mathbf{J}}$ sú množiny neurčitosti odhadov $\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ a $\tilde{\mathbf{J}}$. Predpokladáme obmedzenosť elementov všetkých predchádzajúcich množín. Pre hodnotu funkcie $\mathbf{z}$ platí $\mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{z}} + \Delta\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$, kde $\tilde{\mathbf{z}}$ je odhad hodnoty $\mathbf{z}$ a $\Delta\tilde{\mathbf{Z}}$ je príslušná množina neurčitostí. Predpokladáme, že pre všetky $\Delta\tilde{\mathbf{z}} \in \Delta\tilde{\mathbf{Z}}$ platí $\|\Delta\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \Delta\tilde{z}_{\max}$. V práci sme odvodili zákon riadenia

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}^{-1}[\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{r}}) + \mathbf{v}_2 - \tilde{\mathbf{z}}], \quad (8.3)$$

kde $\mathbf{v}$ je prvý komponent riadenia a $\mathbf{v}_2$ je druhý komponent riadenia. Využitím 8.1 a dosadením $\mathbf{u}$ podľa (8.3) do (8.2) je možné odvodiť

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \in \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{r}}) + \mathbf{v}_2 + \Delta\tilde{\mathbf{Z}} + \Delta\tilde{\mathbf{H}} + \Xi. \quad (8.4)$$

Daná inklúzia opisuje zjednodušený systém, pre ktorý navrhujeme komponenty riadenia $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}_2$.

Prepínacia funkcia v i -tom stupni voľnosti σ_i je daná rovnicou (6.8), kde za odchýlku e a jej deriváciu $\dot{e}$ dosadíme príslušnú odchýlku e_i a jej deriváciu $\dot{e}_i$ v i -tom stupni voľnosti. Prepínacie funkcie σ_i združíme do vektorového poľa prepínacích funkcií $\boldsymbol{\sigma}(e, \dot{e}) = [\sigma_1(e_1, \dot{e}_1) \ \sigma_2(e_2, \dot{e}_2) \ \cdots \ \sigma_n(e_n, \dot{e}_n)]^T$. Pre deriváciu $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ platí

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(e, \dot{e}, \ddot{e}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial e}(e, \dot{e})\dot{e} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \dot{e}}(e, \dot{e})\ddot{e}, \quad (8.5)$$

kde matice $\partial\sigma/\partial e$ a $\partial\sigma/\partial\dot{e}$ sú diagonálne matice parciálnych derivácií. Využívame postačujúcu podmienku stability v tvare inklúzie

$$\dot{\sigma} \in \llbracket -\text{diag}[\text{sgn}(\sigma)]; \mathbb{B}|\sigma|^{\lambda_\beta-1} \rrbracket. \quad (8.6)$$

kde $|\sigma|^{\lambda_\beta-1} = [|\sigma_1|^{\lambda_{1,\beta}-1} \ \dots \ |\sigma_n|^{\lambda_{n,\beta}-1}]^T$, kde $1 < \lambda_{i,\beta} < 2$. Predpokladáme, že $\lambda_{i,\beta} = \lambda_\beta$, kde $1 < \lambda_\beta < 2$, je spoločná konštanta pre všetky stupne voľnosti. Využitím (8.4), (8.5) a invertovateľnosti matice $\mathbf{J}$ je možné odvodiť, že na zabezpečenie platnosti inklúzie (8.6) postačuje ak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{J}}^{-1}[\mathbf{v}_2 + \Xi'] \in & \left[\tilde{\mathbf{J}}^T \mathbf{J}^{-1,T} \frac{\partial\sigma^T}{\partial\dot{e}} \text{diag}[\text{sgn}(\sigma)]; \mathbb{B}|\sigma|^{\lambda_\beta-1} + \right. \\ & \left. + \text{diag}[\text{sgn}(\sigma)] \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\dot{e}} (\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}})\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\partial\sigma}{\partial\dot{e}}\dot{e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Lineárnu množinu na pravej strane označme ako $\llbracket \mathbf{B}; \mathbf{c} \rrbracket$. Z definície lineárnych množín (3.1) vyplýva, že pre platnosť (8.6) postačuje, ak

$$\mathbf{v} \in \llbracket \mathbf{B}; \mathbf{c} \rrbracket \quad \text{a zároveň} \quad \mathbf{v}_2 + \Xi' \subseteq \tilde{\mathbf{J}} \llbracket \mathbf{B}; \mathbf{0} \rrbracket. \quad (8.8)$$

8.3 Návrh riadenia

Cieľom návrhu prvého komponentu riadenia $\mathbf{v}$ je zabezpečiť platnosť inklúzie na ľavej strane (8.8), t. j. vektor $\mathbf{v}$ by mal vyhovovať inklúzii

$$\mathbf{v} \in \left[\tilde{\mathbf{J}}^T \mathbf{J}^{-1,T} \frac{\partial\sigma^T}{\partial\dot{e}} \text{diag}[\text{sgn}(\sigma)]; \mathbb{B}|\sigma|^{\lambda_\beta-1} + \text{diag}[\text{sgn}(\sigma)] \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\dot{e}} (\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}})\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\partial\sigma}{\partial\dot{e}}\dot{e} \right) \right]. \quad (8.9)$$

Na výpočet vektora $\mathbf{v}$, ktorý vyhovuje (8.9), sme využili rekurzívny algoritmus, ktorý opisujeme v podkapitole 3.4. Rekurzívny algoritmus zabezpečí platnosť inklúzie v tvare $\mathbf{v} \in \llbracket \tilde{\mathbf{B}}; \tilde{\mathbf{c}}; \Delta\tilde{\mathbf{B}}; \Delta\tilde{\mathbf{C}} \rrbracket$, pričom (8.9) je implikovaná inklúziou takéhoto tvaru, ak maticu $\tilde{\mathbf{B}}$ zvolíme podľa

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{diag}[\text{sgn}(\sigma)], \quad (8.10)$$

množinu odchýlok $\Delta\tilde{\mathbf{B}}$ matice $\tilde{\mathbf{B}}$ od $\mathbf{B}$ podľa

$$\Delta\tilde{\mathbf{B}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}})^T \text{diag}[\text{sgn}(\sigma)], \quad (8.11)$$

odhad $\tilde{\mathbf{c}}$ vektora posunutí $\mathbf{c}$ podľa

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbb{B} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{-1}}{\partial \dot{\mathbf{e}}} |\boldsymbol{\sigma}|^{\lambda_{\beta}-1} - \text{diag}[\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma})] \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{-1}}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \dot{\mathbf{e}}, \quad (8.12)$$

množinu odchýlok $\Delta \tilde{\mathbf{C}}$ podľa

$$\Delta \tilde{\mathbf{C}} = \text{diag}[\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma})](\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}) \ddot{\mathbf{r}}, \quad (8.13)$$

pričom pre i -ty prvok $\Delta \tilde{\mathbf{C}}$ platí

$$\Delta \tilde{C}_i = \text{sgn}(\sigma_i)(\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1} \tilde{\mathbf{J}})_{i,\star} \ddot{r}_i, \quad (8.14)$$

kde $[\cdot]_{i,\star}$ označuje i -ty riadok matice $[\cdot]$. Konštanta $\lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}}$ predstavuje horné ohraničenie zosilnenia transformácií v množine $\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}$, t. j.

$$\lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}} \geq \max_{\mathbf{J}^{-1} \in \mathbf{J}^{-1}} \left(\max_{\mathbf{x} \in N_c(0;1)} \|(\mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}) \mathbf{x}\| \right). \quad (8.15)$$

Množina vektorov $\Delta \tilde{\mathbf{C}}$ je podmnožinou hyperkvádra, ktorý je definovaný intervalmi $[-|\text{sgn}(\sigma_i)|\lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}}|\ddot{r}_i|; |\text{sgn}(\sigma_i)|\lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}}|\ddot{r}_i|]$, t. j.

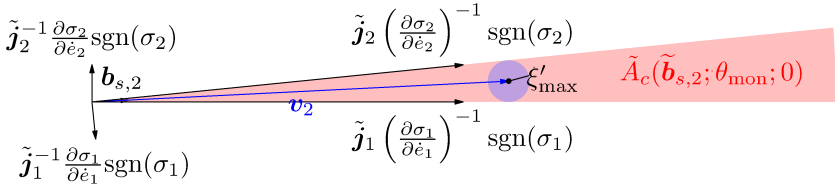
$$\Delta \tilde{\mathbf{C}} \subseteq \prod_{i=1}^n [-r_{i,\Delta \tilde{\mathbf{C}}}; r_{i,\Delta \tilde{\mathbf{C}}}], \quad (8.16)$$

kde $r_{i,\Delta \tilde{\mathbf{C}}}$ je $r_{i,\Delta \tilde{\mathbf{C}}} = |\text{sgn}(\sigma_i)|\lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}}|\ddot{r}_i|$. Je možné odvodiť, že horné ohraničenia $\lceil (\tilde{c}_k + \Delta \tilde{C}_k) / (\tilde{\mathbf{b}}_k + \Delta \tilde{\mathbf{B}}_k)^T \tilde{\mathbf{b}}_k \rceil$ vo výraze pre súradnice $h_{a,k}$ podľa (3.17) môžu byť zvolené podľa

$$\left\lceil \frac{\tilde{c}_i + \Delta \tilde{C}_i}{(\tilde{\mathbf{b}}_i + \Delta \tilde{\mathbf{B}}_i)^T \tilde{\mathbf{b}}_i} \right\rceil' = \frac{\frac{\beta_i |\sigma_i|^{\lambda_{\beta}-1}}{\max \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \dot{e}_i}; \varepsilon_{i,\sigma} \right\}} + \left| \text{sat} \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_{i,\sigma}} \right) \right| \frac{\frac{\partial \sigma_i}{\partial \dot{e}_i}}{\max \left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \dot{e}_i}; \varepsilon_{i,\sigma} \right\}} |\dot{e}_i|}{1 - \lambda_{i,i,\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}}} + \frac{\left| \text{sat} \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_{i,\sigma}} \right) \right| [\lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}} |\ddot{r}_i|]}{1 - \lambda_{i,i,\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}}}. \quad (8.17)$$

Druhý komponent $\mathbf{v}_2$ zákona riadenia (8.3) by mal podľa (8.8) zabezpečiť platnosť inklúzie $\mathbf{v}_2 + \Xi' \subseteq \tilde{\mathbf{J}}[\mathbf{B}; \mathbf{0}]$, kde $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{J}}^T \mathbf{J}^{-1,T} (\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \dot{\mathbf{e}})^T \text{diag}[\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma})]$. Je možné ukázať, že postačuje, ak elementy $\mathbf{v}_2 +$

Ξ' patria do kužľa $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}; \theta_{\text{mon}}; 0)$, kde $\tilde{\mathbf{b}}_{s,2} = \tilde{\mathbf{J}}^{-1} \sqrt{\tilde{\mathbf{J}}^2 \otimes \mathbf{I}} \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma})$ je osový vektor kužľa, θ_{mon} je uhol kužľa daný ako $\theta_{\text{mon}} = \arccos\left(1 / \left\| \tilde{\mathbf{J}}^{-1} \sqrt{\tilde{\mathbf{J}}^2 \otimes \mathbf{I}} \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) \right\| \right) - \theta_{i,c}^{-1,T}$, kde $\theta_{i,c}^{-1,T}$ je uhlová neurčitost' stĺpcov matice $\tilde{\mathbf{B}}_2^{-1,T}$, a 0 je posunutie vrcholu kužľa pozdĺž osi $\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}$. Vektor $\mathbf{v}_2$ zvolíme tak, aby posunutá hyperguľa momentov $\mathbf{v}_2 + \Xi'$ bola z množiny $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}; \theta_{\text{mon}}; 0)$ hnacích momentov, ktoré zabezpečia monotónne klesanie $|\sigma_i|$. Viď obrázok 8.1, na ktorom je nakreslený kužel $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}; \theta_{\text{mon}}; 0)$ momentov, ktoré zabezpečia monotónne klesanie $|\sigma_i|$, a posunutá množina $\mathbf{v}_2 + \Xi'$ poruchových momentov.



Obrázok 8.1. Posunutie hypergule Ξ' tak, aby posunutá hyperguľa momentov $\mathbf{v}_2 + \Xi'$ ležala v kuželi $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}; \theta_{\text{mon}}; 0)$, v ktorom je garantované monotónne klesanie $|\sigma_i|$.

Keďže Ξ' je guľová množina, tak postačuje zvoliť $\mathbf{v}_2$ ako posunutý vrchol kužľa $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}; \theta_{\text{mon}}; 0)$. Smer posunu má byť v smere osového vektora $\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}$, smerom do kužľa. Postačuje ak zvolíme bod

$$\mathbf{v}_{2,\text{mon}} = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}}{\|\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}\|} \frac{\xi'_{\text{max}}}{\sin(\theta_{\text{mon}})}, \quad (8.18)$$

kde ξ'_{max} je polomer Ξ' . Nespojité zložky zákona riadenia (8.19) sme nahradili spojitými aproximáciami, aby sme predišli vybudeniu parazitných oscilácií.

Ak $\theta_{\text{mon}} < 0$, potom riešenie (8.18) neexistuje, pretože kužel $\tilde{A}_c(\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}; \theta_{\text{mon}}; 0)$ je prázdna množina. V takýchto prípadoch je nutné zabezpečiť aspoň nemonotónnu konvergenciu prvkov σ_i . Nech $\theta_{\text{nonm}} = \arctan(1 / \lambda_{\mathbf{I}-\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}} - 1)$. Druhý prvok riadenia zvolíme v tvare

$$\mathbf{v}_{2,\text{nonm}} = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}}{\|\tilde{\mathbf{b}}_{s,2}\|} \frac{\xi'_{\text{max}}}{\sin(\theta_{\text{nonm}}) k_{\text{nonm}}}, \quad (8.19)$$

kde $0 < k_{\text{nonm}} \leq 1$ je konštanta, ktorá určuje mieru monotónnosti riadenia. Pre dostatočne malé k_{nonm} nastane prípad, kedy najprv konverguje hodnota prepínacej funkcie σ_1 do prechodového pásma, preto sa vektor $\mathbf{v}_2$ „natočí“ do smeru $\tilde{\mathbf{b}}_{2,\text{nonm}}$, čo spôsobí posun $\mathbf{v}_2 + \Xi$ do oblasti, v ktorej konvergujú ostatné hodnoty σ_j pre $j \neq i$.

8.4 Riadenie manipulátora

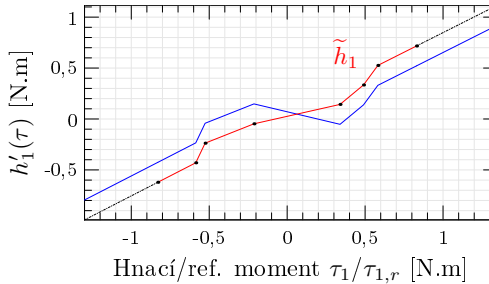
Zákon riadenia (8.3) overujeme pomocou numerických simulácií. Využívame model trojčlánkového tuhého manipulátora typu RRR s hmotnými bodmi umiestnenými na konci článkov s neurčitými parametrami a poruchovými momentmi, ktorý sme uviedli v [51].

Nech m_i predstavujú hmotnosti článkov sústredené na konci článkov v kg, l_i sú dĺžky článkov v metroch, vzdialenosti d_i predstavujú vychýlenia článkov z planárnej konfigurácie v metroch, γ_i sú koeficienty viskózneho trenia. Hodnoty parametrov manipulátora sú uvedené v tabuľke 8.1.

i	m_i [kg]	l_i [m]	d_i [m]	γ_i [N.s]	$\tilde{\mathbf{z}}$	$\tilde{\mathbf{J}}$
1	0,2	0,25	—	0,05		
2	0,2	0,2	0,075	0,05	0,9 $\mathbf{z}$	0,9 $\mathbf{J}$
3	0,15	0,15	0,05	0,05		

Tabuľka 8.1. Parametre manipulátora a odhady $\tilde{\mathbf{z}}$ a $\tilde{\mathbf{J}}$.

Nech horné ohraničenie amplitúdy odchýlok $\tilde{h}_i$ od h'_i je $\Delta\tilde{h}_{\max}$ z tabuľky 7.2. Konkrétne nech je priebeh h'_1 daný ako modré priebehy na obrázku 8.2. Ostatné priebehy h'_2 a h'_3 sú podobne vychýlené voči odhadom $\tilde{h}_2$ a $\tilde{h}_3$.



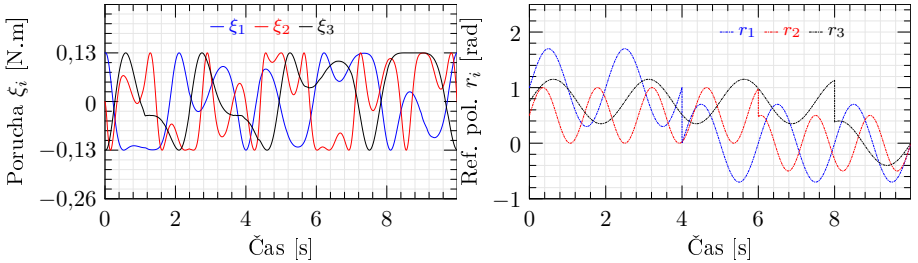
Obrázok 8.2. Priebeh h'_1 pre simulačný experiment (modré krivky) a odhadu $\tilde{h}_1$ (červené krivky).

Parametre prepínacích funkcií sú uvedené v tabuľke 8.2.

i	$\alpha_{i,\text{sfsf}}$	k_i	λ_i	$\varepsilon_{i,\sigma}$	$k_{i,p}$	β	λ_β	$\lambda_{I-J^{-1}\tilde{J}}$
1	0,9	55	1,5	0,6	1	20	1,5	0,1
2	0,9	55	1,5	0,6	1	$\lambda_{i,i,I-J^{-1}\tilde{J}}$	$\Delta\tilde{z}_{\max}$	k_{nonm}
3	0,9	55	1,5	0,6	1	0,1	0,13	0,9

Tabuľka 8.2. Parametre riadenia (8.3). Naľavo sú parametre prepínacích funkcií σ_i . Parametre napravo sa objavujú v predpise (8.19), na pravej strane inklúzie (8.9) a v rekurzívnom algoritme z podkapitoly 3.4, konkrétne vo výraze (8.17).

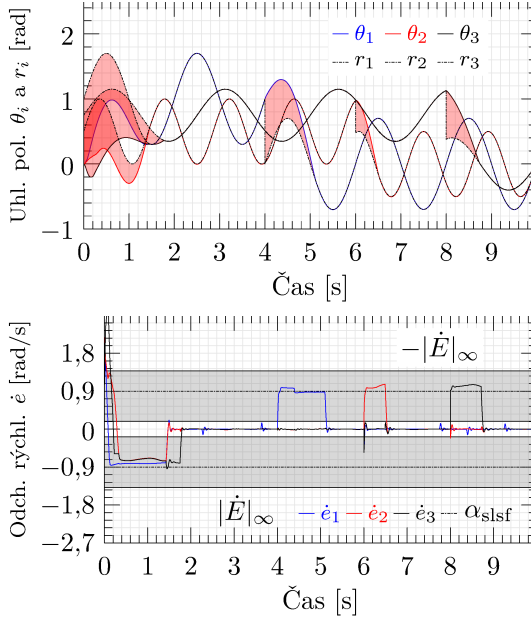
Priebehy poruchových signálov ξ_i a referenčných uhlových natočení r_i sú zobrazené na obrázku 8.3.



Obrázok 8.3. Priebehy poruchových signálov ξ_i v čase (vľavo) a referenčné uhlové natočenia r_i (vpravo).

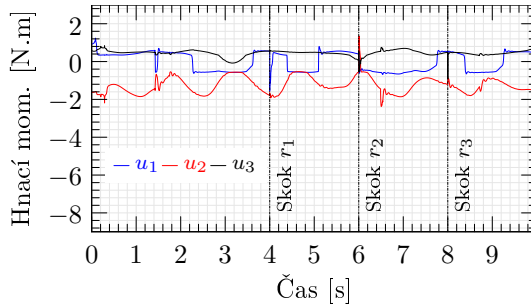
8.5 Simulačné overenie riadenia MIMO systému

Na obrázku 8.4 sú zobrazené priebehy uhlových natočení θ_i a rýchlostí odchýlky $\dot{e}_i$ pre $i = 1, 2, 3$ počas simulácie riadenia manipulatora. V časoch $t \in \{4, 6, 8\}$ nastávajú skokové zmeny referenčných polôh θ_r . Na grafe priebehov uhlových natočení θ_i si môžeme všimnúť, že ostatné stupne voľnosti „nereagujú“ pri skoku r_i , t. j. je zabezpečená monotónnosť klesania e_i (teda robustnosť sledovania) pre všetky i .



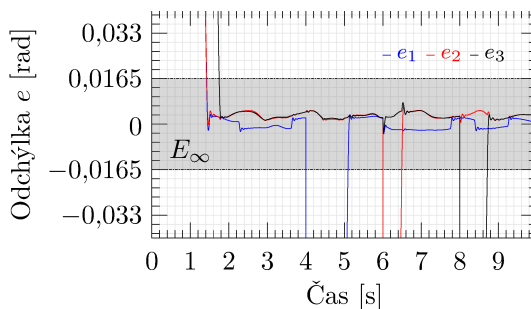
Obrázok 8.4. Priebehy uhlových natočení θ_i (hore) a odchýlok rýchlostí $\dot{e}_i$ (dole) počas simulácie riadenia trojčlánkového manipulátora.

Na grafoch odchýlok rýchlostí $\dot{e}_i$ pozorujeme obmedzenie $\dot{e}_i$ vo všetkých stupňoch voľnosti. Na obrázku 8.5 sú priebehy hnacích momentov τ_i .



Obrázok 8.5. Hodnoty hnacích momentov τ_i pre $i \in \{1, 2, 3\}$.

Priebeh regulačných odchýlok počas simulácie je na obrázku 8.6.



Obrázok 8.6. Priebiehy regulačných odchýlok $e = \theta_r - \theta$ počas simulácie riadenia so zákonom riadenia (8.3).

9 Prínos autora k problematike

Prínosy práce je možné zhrnúť do 4 bodov:

- Navrhli sme robustné regulátory využitím originálnej metódy, ktorá sa zakladá na znalosti množiny riešení postačujúcej podmienky stability a kvality riadenia. V kapitole 3 sme uviedli niekoľko príkladov takýchto množín riešení a vykonali sme rozbor niektorých vlastností daných množín.
- Definovali sme tzv. čiastočne invertovateľné relácie (definícia 4.1) a uviedli sme originálnu metódu riadenia systémov s neurčitými vstupnými reláciami, ktorá sa zakladá na náhrade neurčitej vstupnej relácie invertovateľnou nelineárnou funkciou. Odchýlka medzi invertovateľnou funkciou a pôvodnou reláciou je pokladaná za poruchu, ktorá je potlačená robustným riadením. Metódu sme opísali v kapitole 4 a zhrnuli ako Lemu 4.1. Postup sme rozšírili aj na viacrozmerné systémy, čo sme opísal v kapitole 8.
- Na aproximáciu neurčitých vstupných relácií sme využili invertovateľnú umelú neurónovú sieť. V kapitole 5 sme uviedli originálny algoritmus nastavenia parametrov.
- Definovali sme dve saturované prepínacie funkcie s konvergenciou v konečnom čase. Vyriešili sme problém necitlivosti prepínacej funkcie (6.2) v niektorých oblastiach fázovej roviny. Výsledkom je prepínacia funkcia (6.8). Pre obe prepínacie funkcie (6.2) a (6.8) sme odvodili intervaly ustálenia regulačnej odchýlky a jej derivácie v čase v kváziklávovom režime.

Záver

Robustné riadenie musí zabezpečiť požadovanú kvalitu riadenia aj prípadoch, kedy model riadeného dynamického systému obsahuje neurčitosti a na systém pôsobia externé poruchy s neznámym priebehom v čase. Problém riadenia za prítomnosti neurčitostí sme poňali ako problém zabezpečenia platnosti postačujúcich podmienok stability a konvergencie. Postačujúca podmienka pritom musí platiť pre všetky možné hodnoty neurčitých veličín, čo zabezpečí robustnosť riadenia. Postup syntézy regulátora, ktorý sme v práci uviedli, vychádza zo znalosti množín riešení postačujúcich podmienok stability. V uvedených príkladoch riadenia natočenia hriadeľa motora a kľbovej polohy manipulátora množiny riešení postačujúcich podmienok stability reprezentovali oblasti momentov, ktoré zabezpečia požadovanú úroveň stability a kvality riadenia. Následne sme vyžitím riadenia posunuli celkový moment pôsobiaci v danom stupni voľnosti do danej oblasti.

Odvodili sme dva zákony riadenia systémov s neurčitosťami, ktoré využívajú nami definované originálne saturované prepínacie funkcie s konvergenciou v konečnom čase. Prvý zákon riadenia sme odvodili pre jednorozmerný systém riadenia natočenia motora s neurčitosťami parametrov a externými poruchami. Zostrojili sme model takéhoto systému, riadenie sme overili a experimentálne porovnali numerickými simuláciami a aj na laboratórnom modeli s niekoľkými klasickými prístupmi nerobustného i robustného riadenia. Druhý zákon riadenia sme odvodili pre viacrozmerný systém. Potom sme riadenie overili simulačne a výsledky sme porovnali s klasickým prístupom robustného riadenia. Ukázali sme, že odvodené riadenie zabezpečuje vyššiu kvalitu riadenia, obmedzenie odchýlky rýchlosti a menšiu amplitúdu akčného zásahu.

Riadenie obsahuje aj komponent s výpočtovou inteligenciou. Jeho úlohou je modelovať nelinearity systému a nahradiť ich tzv. čiastočne invertovateľnou reláciou. Využili sme invertovateľnú, po častiach lineárnu funkciu, ktorú je možné pokladať za typ umelej neurónovej siete. Uviedli sme aj nový algoritmus nastavenia parametrov neurónovej siete, ktorý zohľadňuje ciele robustného riadenia a preto minimalizuje uniformnú normu odchýlky výstupu umelej neurónovej siete.

Robustné riadenie s (kvázi)kľzavým režimom je vhodným kandidátom pre aplikácie so systémami s výraznými poruchami, pretože pri návrhu riadenia je možné jednoducho potlačiť externé poruchy a zohľadniť neurčitosti riadeného systému.

Oblasť výskumu riadenia s (kvázi)kľzavým režimom, a vo všeobecnosti riadenia s premenlivou štruktúrou, je stále aktívnou oblasťou výskumu. Ďalší výskum sa sústreďí na definíciu nových prepínacích funkcií, rozbor ich vlastností a vývoj nových aplikácií teórie. Teóriu riadenia s kľzavým režimom možno využiť na návrh regulátorov s kvázikľzavým režimom aj pre diskretné systémy. V budúcnosti by sme sa chceli sústreďiť práve na túto oblasť výskumu.

Literatúra

- [1] Ján Kardoš. *Teória systémov s premenlivou štruktúrou a časovo suboptimálne riadenie polohy*. HMH, Bratislava, 2007.
- [2] V. Utkin. Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222, April 1977.
- [3] Girish Lakhekar, V. Laxman M. Waghmare, Prakash G. Jadhav, a Rupam Gupta Roy. Robust Diving Motion Control of an Autonomous Underwater Vehicle Using Adaptive Neuro-Fuzzy Sliding Mode Technique. *IEEE Access*, 8:109891–109904, 2020.
- [4] S. G. Khan. Adaptive Chaos Control of a Humanoid Robot Arm: A Fault-Tolerant Scheme. *Mechanical Sciences*, 14(1):209–222, 2023.
- [5] Ján Kardoš. Simplified Robust Control of an Anthropomorphic Leg. V *2013 International Conference on Process Control (PC)*, strany 130–135. June 2013.
- [6] Mehran Rahmani a Mohammad Habibur Rahman. Adaptive Neural Network Fast Fractional Sliding Mode Control of a 7-DOF Exoskeleton Robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 18(1):124–133, Jan 2020.
- [7] S. Tzeranis, P. S. Trakas, X. Papageorgiou, K. J. Kyriakopoulos, a C. P. Bechlioulis. Robust Prescribed Performance Control and Adaptive Learning for the Longitudinal Dynamics of Fixed-Wing UAVs. V *2022 10th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, strany 391–396. 2022.
- [8] C. Tang, Z. Huang, C. Wei, a Y. Zhao. Dynamic and Sliding Mode Control of Space Netted Pocket System Capturing and Attitude Maneuver Non-cooperative Target. *Mechanical Sciences*, 13(2):751–760, 2022.
- [9] Zhipeng Shen, Yu Wang, Haomiao Yu, a Chen Guo. Finite-time Adaptive Tracking Control of Marine Vehicles With Complex Unknowns and Input Saturation. *Ocean Engineering*, 198, Feb 15 2020.
- [10] Hossein Ghasemi, Behrooz Rezaie, a Zahra Rahmani. Terminal Sliding Mode Control with Evolutionary Algorithms for Finite-Time Robust Tracking of Nonholonomic Systems. *Information Technology And Control*, 47(1):26–44, 2018.
- [11] Nghia Nguyen, Hung T. Nguyen, a Steven Su. Neuro-Sliding Mode Multivariable Control of a Powered Wheelchair. V *2008 30th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Vols 1-8*, IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Conference Proceed-

dings, strany 3471–3474. 2008.

- [12] Liping Fan a Yazhou Yu. Adaptive Non-singular Terminal Sliding Mode Control for DC-DC Converters. *Advances In Electrical And Computer Engineering*, 11(2):119–122, 2011.
- [13] Zahid Afzal Thoker a Shameem Ahmad Lone. Neuro Adaptive Sliding Mode Control of a Fast Acting Energy Storage System. *IFAC-PapersOnLine*, 55(1):309–314, 2022. 7th International Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems ACODS 2022.
- [14] Muhammad Bilal Anjum, Qudrat Khan, Safeer Ullah, Ghulam Hafeez, Adnan Fida, Jamshed Iqbal, a Fahad R. Albogamy. Maximum Power Extraction from a Standalone Photo Voltaic System via Neuro-Adaptive Arbitrary Order Sliding Mode Control Strategy with High Gain Differentiation. *Applied Sciences*, 12(6), 2022.
- [15] L. Ouada, S. Benaggoune, a S. Belkacem. Neuro-fuzzy Sliding Mode Controller Based on a Brushless Doubly Fed Induction Generator. *International Journal of Engineering*, 33(2):248–256, feb 2020.
- [16] En-Chih Chang. Study and Application of Intelligent Sliding Mode Control for Voltage Source Inverters. *Energies*, 11(10), 2018.
- [17] Xianku Zhang a Chunyu Song. Robust Controller Decorated by Nonlinear S Function and Its Application to Water Tank. *Applied System Innovation*, 4(3), sep 2021.
- [18] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, a A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. Springer New York, 2013.
- [19] Denis Vasko, Ján Kardoš, a Eva Miklovičová. Variable Structure Control of Second Order Systems With Nonlinear Uncertain Discontinuous Input Functions Using Approximate Inverses. *IEEE Access*, 10:134157–134163, 2022.
- [20] I. Sekaj. *Evolučné výpočty a ich využitie v praxi*. Iris, 2005.
- [21] J. Javadi-Moghaddam a A. Bagheri. An Adaptive Neuro-Fuzzy Sliding Mode Based Genetic Algorithm Control System for Under Water Remotely Operated Vehicle. *Expert Systems with Applications*, 37(1):647–660, 2010.
- [22] Charu C. Aggarwal. *Neural Networks and Deep Learning*. Springer, Cham, 2018.
- [23] T.M. Apostol. *Calculus, Volume 1*. Wiley, 1991.
- [24] J.J.E. Slotine a W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [25] Carlos Arturo Martinez-Fuentes, Ulises Perez-Ventura, a Leonid Fridman. Chattering analysis for Lipschitz continuous sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9, Si):3779–3794, jun 2021.
- [26] Xinghuo Yu, Yong Feng, a Zhihong Man. Terminal Sliding Mode Control – An Overview. *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, 2:36–52, 2021.
- [27] Hoon Lee a Vadim I. Utkin. Chattering Suppression Methods in Sliding Mode Control Systems. *Annual Reviews in Control*, 31(2):179–188, 2007.
- [28] Gaurav Kumawat a Jayashri Vajpai. Fuzzy Sliding Mode Controller for Dynamic Nonlinear Systems. V Anupam Basu, Sukhendu Das, Patrick Horain, a Samit Bhattacharya, editors, *Intelligent Human Computer Interaction*,

- strany 217–228. Cham, 2017. Springer International Publishing.
- [29] Ahmad Bagheri a Jalal Javadi Moghaddam. Simulation and Tracking Control Based on Neural-Network Strategy and Sliding-Mode Control for Underwater Remotely Operated Vehicle. *Neurocomputing*, 72(7):1934–1950, 2009. Advances in Machine Learning and Computational Intelligence.
 - [30] Seied Yasser Nikoo, Behrooz Rezaie, Zahra Rahmani, a Seied Jalil Sadati. An Intelligent Neuro-Fuzzy Terminal Sliding Mode Control Method with Application to Atomic Force Microscope. *IIUM Engineering Journal*, 17(2):185–204, nov 2016.
 - [31] Fi-John Chang a Ya-Ting Chang. Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System for Prediction of Water Level in Reservoir. *Advances in Water Resources*, 29(1):1–10, 2006.
 - [32] JSR Jang. ANFIS - Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System. *IEEE Transactions on Systems man and Cybernetics*, 23(3):665–685, May-jun 1993.
 - [33] Yildiray Yildiz, Asif Sabanovic, a Khalid Abidi. Sliding-Mode Neuro-Controller for Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(3):1676–1685, June 2007.
 - [34] Feng Zhang-qi, Jiang Hao-bin, Wei Qi-zhi, Hong Yang-ke, a Ojo Abiodun Oluwaleke. Model-Free Adaptive Sliding Mode Control for Intelligent Vehicle Longitudinal Dynamics. *Advances in Mechanical Engineering*, 14(7), Jul 2022.
 - [35] A. E. Eiben a James E. Smith. *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edition, 2015.
 - [36] Xin-She Yang. A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm. V JR Gonzalez, DA Pelta, C Cruz, G Terrazas, a N Krasnogor, editors, *NICSO 2010: Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization*, zväzok 284 of *Studies in Computational Intelligence*, strany 65–74. Univ Laguna; Carnary Govt; Spanish Govt, 2010.
 - [37] Dervis Karaboga a Bahriye Akay. A Comparative Study of Artificial Bee Colony Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 214(1):108–132, 2009.
 - [38] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Communications and Control Engineering. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
 - [39] Hassan Moradi, Hamid Yaghobi, Yousef Alinejad-Beromi, a Danyal Bustan. Power-control and Speed-control Modes of a DFIG Using Adaptive Sliding Mode Type-2 Neuro-fuzzy for Wind Energy Conversion System. *IET Renewable Power Generation*, 14(15):2946–2954, Nov 16 2020.
 - [40] Denis Vasko a Jan Kardos. Time Suboptimal Variable Structure Control with Neural Controller. 2022.
 - [41] Huaran Yan, Yingjie Xiao, Qinrong Li, a Renqiang Wang. Differential Evolution Algorithm-Based Iterative Sliding Mode Control of Underactuated Ship Motion. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2021, Dec 8 2021.
 - [42] M. Ahmadi Khansar, M. Teshnehlab, a M. Aliyari Shoorehdeli. Fuzzy Sliding Mode Control of Rotary Inverted Pendulum. V *2007 IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, strany 57–62. Oct 2007.
 - [43] Ji-Chang Lo a Ya-Hui Kuo. Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(3):426–435, Aug 1998.

- [44] Jan Kardoš. Robust Point-to-Point Control with Velocity Limitation. Strany 81–85. 345 E 47th St, New York, NY 10017 USA, 2017. IEEE. 21st International Conference on Process Control (PC), Štrbské Pleso, Slovakia, Jun 06–09, 2017.
- [45] R.A. Horn a C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2012.
- [46] T.M. Apostol. *Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, With Applications to Differential Equations And Probability*. Blaisdell book in pure and applied mathematics. Wiley, 1967.
- [47] Denis Vasko, Ján Kardoš, Eva Miklovičová, a Ľuboš Chovanec. Saturated Switching Functions for Sliding Mode Control With Speed Error Limitation. *IEEE Access*, 12:104846–104856, 2024.
- [48] Yong Feng, Xinghuo Yu, a Fengling Han. On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems. *Automatica*, 49(6):1715–1722, 2013.
- [49] Ján Kardoš. Robust Robot Control Driven by a Variable Structure State Observer. V *2018 19th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, strany 410–415. 345 E 47th St, New York, NY 10017 USA, 2018. IEEE.
- [50] John R. Taylor. *Classical mechanics*. University Science Books, Mill Valley, California, 2005.
- [51] Denis Vasko a Ján Kardoš. Kinematic and Dynamic Model of a Non-planar Articulated Manipulator. V *ELITECH '22*. Spektrum STU, 2020.
- [52] J.J. Craig. *Introduction to Robotics: Pearson New International Edition PDF eBook: Mechanics and Control*. Pearson Education, 2013.

Prehľad publikácií dizertanta a ich evidencia v databázach Current Contents (CC), Web of Science (WoS), Scopus, Google Scholar (GS)

IF – Impact factor časopisu

A resp. **B** – výstup kategórie A, resp. B hodnotené podľa Kritérií na hodnotenie úrovne výskumnej, vývojovej, umeleckej a ďalšej tvorivej činnosti v rámci komplexnej akreditácie činností vysokej školy.

V zozname vyznačte **tučným písmom** vedecké práce v zahraničných vedeckých časopisoch vo svetovom jazyku

Vedecké publikácie a ich evidencia v sledovaných databázach	IF	CC	WoS	Scopus	GS	A	B
VASKO, Denis; KARDOŠ, Ján; MIKLOVIČOVÁ, Eva; CHOVANEC, Ľuboš. Saturated Switching Functions for Sliding Mode Control With Speed Error Limitation. IEEE Access, 12. s. 104846--104856.	3,4	x	x	x	x	x	
VASKO, Denis; KARDOŠ, Ján; MIKLOVIČOVÁ, Eva. Variable structure control of second order systems with nonlinear uncertain discontinuous input functions using approximate inverses. IEEE Access, 10. s. 134157--134163.	3,4	x	x	x	x	x	
VASKO, Denis; KARDOŠ, Ján. Robust liquid level control with uncertain flows and speed limitation. In: CIGÁNEK, Ján; KOZÁK, Štefan; KOZÁKOVÁ, Alena. 2022 Cybernetics & Informatics (K&I). Danvers, Massachusetts, USA: IEEE, 2022, ISBN 978-1-6654-8774-0.				x	x		x
VASKO, Denis; KARDOŠ, Ján. Time suboptimal variable structure control with neural controller. In: ICECET 2022. Piscataway: IEEE, 2022, ISBN 978-1-6654-7087-2.				x	x		x